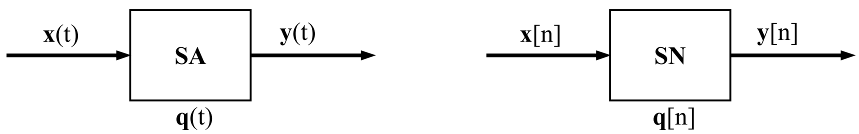
1. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE SISTEMELOR ELECTRICE ŞI ELECTRONICE

1.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Un sistem (numit uneori şi sistem fizic) poate fi definit ca un ansamblu de componente interconectate între ele astfel încât există două porţi: cea de intrare şi cea de ieşire. În cazul unui sistem electric (şi/sau electronic), natura componentelor este cea menţionată, iar porţile se mai numesc circuite de intrare, respectiv de ieşire. Mărimile fizice care intervin în funcţionarea unui sistem pot fi clasificate în:

- mărimi cu variaţie ***independentă***, numite ***mărimi de intrare*** sau ***excitaţii***;
- mărimi ***dependente*** de cele de intrare, numite ***mărimi de ieşire*** sau ***răspunsuri***.

Trebuie observat însă că răspunsul sistemului nu este determinat în mod unic de excitaţie. De exemplu, curentul ce încarcă un condensator depinde atât de valoarea tensiunii ce i se aplică la borne, dar şi de sarcina electrică existentă în dielectricul său în momentul aplicării acestei tensiuni. Rezultă că răspunsul sistemului depinde şi de o a treia mărime, numită ***starea*** sa în momentul aplicării excitaţiei. Într-un sistem electric, excitaţia, răspunsul şi starea sunt funcţii de timp; dacă aceste semnale sunt **continue**, atunci sistemul este **analogic** (**SA**), iar dacă sunt ***eşantionate*** (numerice), sistemul este ***numeric*** (***SN***). Excitaţia, răspunsul şi starea se vor nota de obicei x(t), y(t), q(t) în cazul sistemelor analogice, respectiv x[n], y[n], q[n] în cazul celor numerice. În figura 1.1 sunt date reprezentările schematice ale sistemelor.



a) b)

Fig. 1.1 Reprezentarea schematică a sistemelor:
a) analogice;
b) numerice

Excitaţia, răspunsul şi starea unui sistem pot fi mărimi scalare sau vectoriale. În figura 1.1. s-a considerat cazul cel mai general, în care aceste mărimi sunt vectoriale:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_P(t) \end{bmatrix};\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_R(t) \end{bmatrix};\ \mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_S(t) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Rezultă că sistemele reprezentate în figura 1.1 sunt caracterizate de P porţi de intrare, R porţi de ieşire şi S mărimi de stare. S defineşte o altă caracteristică, numită **ordinul** sistemului, şi care este egal cu numărul elementelor **acumulatoare de energie** (capacităţi şi/sau inductanţe în cazul sistemelor electrice).

Atât SA cât şi SN pot fi de tip hardware (un ansamblu de componente fizice) sau software (un ansamblu de algoritmi materializaţi sub forma unor programe de calcul).

Analiza sistemului constă în determinarea comportării acestuia, adică aflarea răspunsului atunci când la intrare se aplică o excitaţie cunoscută, în momentul t_0 (n_0) - transferul intrare-ieşire. Această legătură între răspuns şi excitaţie este dată de modelul matematic al sistemului. În cadrul teoriei sistemelor, modelul matematic se confundă adesea cu noţiunea de sistem (dinamic).

Prin starea iniţială $\mathbf{q}(t_0)$ sau $\mathbf{q}[n_0]$ se înţelege informaţia minimă necesară pentru determinarea răspunsului $\mathbf{y}(t)$ sau $\mathbf{y}[n]$. Un sistem cu starea iniţială nulă se spune că porneşte din repaus.

Dacă răspunsul sistemului este cert, atunci sistemul se mai numeşte determinist.

1.2. PROPRIETĂŢI GENERALE

1.2.1. Cauzalitatea

Un sistem este cauzal dacă răspunsul său pentru $t \geq t_0$ $(n \geq n_0)$ depinde exclusiv de excitaţie şi de starea iniţială. De obicei $t_0 = 0$ $(n_0 = 0)$. Dacă sistemul este iniţial în repaus şi $\mathbf{x}(0) = 0$ $(\mathbf{x}[0] = 0)$, atunci $\mathbf{y}(0) = 0$ $(\mathbf{y}[0] = 0)$, adică unei excitaţii cauzale îi corespunde un răspuns cauzal.

În acest context, mărimile de intrare se mai numesc şi mărimi cauză, iar cele de ieşire mărimi efect. Prin cauzalitate se poate înţelege şi faptul evident că un efect nu poate apărea înaintea cauzei şi independent de aceasta (sistemul este neanticipativ). Un sistem este strict cauzal dacă efectul apare strict după cauză. Dacă există efecte sau componente ale lor care apar simultan cu cauza, sistemul se numeşte la limită cauzal.

Se pot formula următoarele propoziţii:

- Există aplicaţia $\boldsymbol{\lambda}$ (funcţia de stare) care permite determinarea evoluţiei în timp a stării (vectorului de stare) sistemului, dacă se cunoaşte perechea excitaţie – stare în momentul iniţial:

$$\{\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t)\} \xrightarrow{\lambda(t)} \frac{d\mathbf{q}}{dt} := \dot{\mathbf{q}}(t), \text{ în cazul SA} \tag{1.2a}$$

$$\{\mathbf{x}[n], \mathbf{q}[n]\} \xrightarrow{\lambda[n]} \mathbf{q}[n+1], \text{ în cazul SN} \tag{1.2b}$$

- Există aplicaţia $\boldsymbol{\mu}$ (funcţia de ieşire) care permite determinarea evoluţiei în timp a răspunsului (vectorului de răspuns) sistemului, dacă se cunoaşte perechea excitaţie – stare în momentul iniţial:

$$\{\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t)\} \xrightarrow{\mu(t)} \mathbf{y}(t), \text{ în cazul SA} \tag{1.3a}$$

$$\{\mathbf{x}[n], \mathbf{q}[n]\} \xrightarrow{\mu[n]} \mathbf{y}[n], \text{ în cazul SN} \tag{1.3b}$$

1.2.2. Liniaritatea

Un sistem determinist şi cauzal este liniar dacă aplicaţiile $\boldsymbol{\lambda}$ şi $\boldsymbol{\mu}$ sunt liniare. În acest caz, relaţiile (1.2) şi (1.3) se scriu sub forma:

- În cazul aplicaţiei $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}(t), \text{ pentru SA} \tag{1.4a}$$

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[n] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}[n], \text{ pentru SN} \tag{1.4b}$$

- În cazul aplicaţiei $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}(t), \text{ pentru SA} \tag{1.5a}$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}[n] + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}[n], \text{ pentru SN} \tag{1.5b}$$

În (1.4) şi (1.5) constantele **A**, **B**, **C**, **D** reprezintă matrici cu dimensiuni corespunzătoare, astfel încât relaţiile să fie corecte; determinaţi aceste dimensiuni, dacă vectorii **x**(t), **q**(t) şi **y**(t) au dimensiunile din (1.1).

O consecinţă importantă a liniarităţii este superpoziţia răspunsurilor în raport cu excitaţiile şi stările sistemului.

1.2.3. Invarianţa în timp

Un sistem determinist şi cauzal este invariant în timp dacă aplicaţiile $\boldsymbol{\lambda}$ şi $\boldsymbol{\mu}$ sunt independente de timp (în cazul SA), respectiv de n (în cazul SN).

În multe situaţii, liniaritatea şi invarianţa în timp reprezintă ipoteze simplificatoare, folosite în scopul de a obţine sisteme ideale. Din acest motiv ele trebuie aplicate exclusiv în domeniile de variaţie ale semnalelor pentru care sistemul este (quasi)liniar, respectiv pentru intervale de timp limitate, ce depind de alte proprietăţi (fizice, chimice, condiţii de mediu, etc.) ale sistemului sau ale componentelor acestuia. O tehnică frecvent folosită este liniarizarea sistemului pe porţiuni.

Comportarea sistemelor deterministe, liniare şi invariante în timp este descrisă de ecuaţii diferenţiale (cazul SA), sau cu diferenţe finite (cazul SN), ambele cu coeficienţi constanţi.

1.2.4. Stabilitatea

Un sistem cauzal şi determinist este stabil dacă semnalele caracteristice (răspunsul şi starea) sunt de modul mărginit, în cazul aplicării unei excitaţii de modul mărginit:

$$|\mathbf{x}(t)| < \mathbf{M}_x < \infty \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{q}(t)| < \mathbf{M}_q < \infty \\ |\mathbf{y}(t)| < \mathbf{M}_y < \infty \end{cases}, \forall t \geq t_0, \text{ în cazul SA} \tag{1.6a}$$

$$|\mathbf{x}[n]| < \mathbf{M}_x < \infty \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{q}[n]| < \mathbf{M}_q < \infty \\ |\mathbf{y}[n]| < \mathbf{M}_y < \infty \end{cases}, \forall n \geq n_0, \text{ în cazul SN} \tag{1.6b}$$

În literatură stabilitatea mai poate fi întâlnită şi sub denumirea **BIBO** (**B**ounded **I**nput, **B**ounded **O**utput).
Asigurarea stabilităţii este un deziderat major în proiectarea şi implementarea sistemelor.
În relaţiile (1.6) notaţiile de tipul $|\mathbf{x}(t)|$ trebuie înţelese ca vector al modulelor componentelor vectorului **x**(t).

1.2.5. Realitatea

Un sistem este real dacă $x(t) \in \mathbf{R} \Rightarrow y(t) \in \mathbf{R}$. Sistemele reale şi liniare asigură corespondenţa între părţile reale şi imaginare ale excitaţiei, respectiv răspunsului.
În continuare se va lucra cu sisteme deterministe, cauzale, liniare şi de obicei în repaus. De cele mai multe ori, excitaţia şi răspunsul vor fi scalare (sistemele vor avea o singură poartă de intrare, respectiv ieşire). Care este deosebirea între un astfel de sistem şi un cuadripol?

1.3. MODELAREA MATEMATICĂ A RĂSPUNSULUI ÎN TIMP A SA

În continuare se vor considera SA invariabile în timp (SAI), bineînţeles cauzale şi deterministe. Dacă la intrare există excitaţia x(t), atunci răspunsul y(t) este dependent de semnalul de intrare şi de proprietăţile SAI. Se cunoaşte că un sistem electric poate fi descris cu ajutorul teoremelor generale ale electrotehnicii (Kirchoff sau echivalente ale acestora). În urma aplicării acestora se obţine un sistem de ecuaţii integro-diferenţiale, cu coeficienţi constanţi în cazul SAI.
Ordinul unui astfel de sistem este dat de numărul elementelor acumulatoare de energie, adică de numărul inductanţelor (acumulatoare de energie magnetică, echivalenta energiei cinetice) şi de numărul capacităţilor (acumulatoare de energie electrică, echivalenta energiei potenţiale). Ecuaţia diferenţială echivalentă cu sistemul de ecuaţii ce descrie comportarea sistemului are acelaşi ordin cu ordinul sistemului.
Metodele de analiză a comportării SAI sunt astfel metodele de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale (cu coeficienţi constanţi).

1.3.1. Metoda integrării directe

Pentru ilustrarea acestei metode se va considera un exemplu, respectiv SAI ilustrat sub forma circuitului din figura 1.2.
Se consideră că excitaţia este u(t) (treapta unitate), iar răspunsul $i_L(t)$. La fel de bine s-ar putea considera ca mărime de ieşire oricare alta dintre cele reprezentate pe circuitul din figura 1.2. Se dau:
$R = 1\Omega$, $C = \frac{5}{\pi}\mu F$, $L = \frac{4}{\pi}\mu H$.

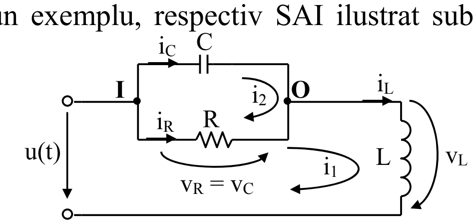


Fig.1.2
Exemplu de SAI

Introducând curenţii ciclici i_1 şi i_2, rezultă că $i_C = i_2$, $i_L = i_1$ şi $i_R = i_1 - i_2$, astfel că, aplicând teoremele lui Kirchoff, se obţin următoarele relaţii:

$$\begin{cases} R\cdot\left(i_1(t)-i_2(t)\right)+L\cdot\dfrac{di_1(t)}{dt}=u(t) \\ -R\cdot\left(i_1(t)-i_2(t)\right)+\dfrac{1}{C}\cdot\int i_2(t)dt=0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Sistemul (1.7) trebuie completat cu condiţiile iniţiale corespunzătoare elementelor reactive. Cum $x(t)=u(t)$, rezultă că $t_0=0$, astfel că starea iniţială a sistemului devine:

$$\begin{cases} \Phi_L(0)=\Phi_0 \Leftrightarrow L\cdot i_1\big|_{t=0}=\Phi_0 \underset{L=ct.}{\Longleftrightarrow} i_1(0)=\dfrac{\Phi_0}{L}:=I_0 \\ q_C(0)=Q_0 \Leftrightarrow C\cdot v_C\big|_{t=0} \underset{C=ct.}{\Longleftrightarrow} v_C(0)=\dfrac{Q_0}{C}:=V_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Se observă că excitaţia şi răspunsul sunt mărimi scalare, iar starea o mărime vectorială.
Ca şi componente ale vectorului de stare de stare pot fi alese oricare două mărimi independente ale sistemului, de exemplu i_1 şi i_2. În aceste condiţii, vectorii **x**(t), **q**(t) şi **y**(t) devin: $\mathbf{x}(t)=\left(u(t)\right)$; $\mathbf{q}(t)=\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$; $\mathbf{y}(t)=\left(i_2(t)\right)$.

Sistemul (1.7) se scrie echivalent sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}=\dfrac{1}{L}\cdot u(t)-\dfrac{R}{L}\cdot i_1+\dfrac{R}{L}\cdot i_2 \\ \dfrac{di_2}{dt}=\underbrace{\dfrac{1}{L}\cdot u(t)-\dfrac{R}{L}\cdot i_1+\dfrac{R}{L}\cdot i_2}_{\frac{di_1}{dt}}-\dfrac{1}{R\cdot C}\cdot i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}=\dfrac{1}{L}\cdot u(t)-\dfrac{R}{L}\cdot i_1+\dfrac{R}{L}\cdot i_2 \\ \dfrac{di_2}{dt}=\dfrac{1}{L}\cdot u(t)-\dfrac{R}{L}\cdot i_1+\left(\dfrac{R}{L}-\dfrac{1}{R\cdot C}\right)\cdot i_2 \end{cases}$$

care este asemănătoare cu ecuaţia de stare (1.5a). Este evident faptul că matricile **A** şi **B** din (1.5a) sunt următoarele:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{L} \end{pmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L} \\ -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L}-\dfrac{1}{R\cdot C} \end{pmatrix}$$

Din punctul de vedere al funcţiei de ieşire relaţia (1.4a) devine foarte simplă:

$$\underbrace{\left(i_2(t)\right)}_{\mathbf{y}(t)}=\underbrace{(0)}_{\mathbf{C}}\cdot\underbrace{\left(u(t)\right)}_{\mathbf{x}(t)}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}(t)},$$

deci matricile **C** şi **D** sunt:

$$\mathbf{C}=(0)=O_1;\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Observaţie</u>:
Alegerea mărimilor de stare nu este unică. De exemplu, circuitul (sistemul) din figura 1.2 poate fi abordat direct cu teoremele lui Kirchoff:

$$\begin{cases} u(t)=v_C(t)+v_L(t) \\ u(t)=R\cdot i_R(t)+v_L(t) \\ v_L(t)=L\cdot\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ v_C(t)=\dfrac{1}{C}\cdot\int i_c(t)dt \Leftrightarrow i_C(t)=C\cdot\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ i_L(t)=i_R(t)+i_C(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=R\cdot i_R(t)+L\cdot\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t)=i_R(t)+C\cdot\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ i_R(t)=\dfrac{v_C(t)}{R} \end{cases}$$

În final se obţine sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{1}{L} \cdot u(t) - \dfrac{1}{L} \cdot v_C(t) \\ \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} \cdot i_L(t) - \dfrac{1}{R \cdot C} \cdot v_C(t) \end{cases}, \tag{1.9}$$

cu condiţiile iniţiale (1.8).

Se observă că în acest caz mărimile **x**(t) şi **y**(t) sunt aceleaşi (în figura 1.2 se poate observa că $i_L(t) = i_1(t)$), iar vectorul de stare devine $\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix}$.

Matricile **A** şi **B** din (1.5a) sunt următoarele:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R \cdot C} \end{pmatrix}$$

Şi în acest caz, din punctul de vedere al funcţiei de ieşire, relaţia (1.4a) devine banală:

$$\underbrace{(i_L(t))}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{(0)}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{(u(t))}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{(1 \quad 0)}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}(t)},$$

deci matricile **C** şi **D** sunt:

$$\mathbf{C} = (0) = O_1; \ \mathbf{D} = (1 \quad 0)$$

Revenind la sistemul (1.7), acesta se rezolvă prin metoda eliminării, obţinându-se o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, cu necunoscuta i_1 (pentru simplificarea scrierii, în locul notaţiilor de tipul $i_1(t)$ se vor adopta notaţii de tipul i_1):

$$(1.7) \Leftrightarrow \begin{cases} R \cdot (i_1 - i_2) + L \cdot \dfrac{di_1}{dt} = u \\ L \cdot \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C} \cdot \int i_2 dt = u \end{cases} \underset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} R \cdot \left(i_1 + L \cdot C \cdot \dfrac{d^2 i_1(t)}{dt^2} \right) + L \cdot \dfrac{di_1}{dt} = u \\ L \cdot C \cdot \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + i_2 = 0 \end{cases}$$

S-a obţinut următoarea ecuaţie (cu coeficienţi constanţi), în necunoscuta i_1:

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{u}{R}, \tag{1.10}$$

condiţiile iniţiale fiind (1.8).

Soluţia generală a ecuaţiei (1.10) este de forma:

$$i_1(t) = i_{1_t}(t) + i_{1_p}(t), \tag{1.11}$$

în care $i_{1_t}(t)$ este componenta tranzitorie (sau liberă), şi este soluţia (generală) a ecuaţiei omogene:

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 = 0, \tag{1.12}$$

iar $i_{1_p}(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1.10), şi care este de tipul termenului liber. În cazul de faţă, analizând fie ecuaţia (1.10), fie schema din figura 1.2, este evident că

$$i_{1_p}(t) = \frac{u}{R} \tag{1.13}$$

Ecuaţia omogenă (1.12) fiind cu coeficienţi constanţi, soluţia se obţine cu ajutorul ecuaţiei caracteristice:

$$s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0, \tag{1.14}$$

în care s-au folosit notaţiile:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}; \alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} \tag{1.15}$$

Dacă s_1 şi s_2 sunt rădăcinile ecuaţiei (1.14), soluţia generală a ecuaţiei (1.12) este:

$$i_{1_t}(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}, \tag{1.16}$$

în care K_1 şi K_2 sunt constante de integrare. Soluţia ecuaţiei neomogene (1.10) devine:

$$i_1(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \frac{u}{R} \tag{1.17}$$

Constantele K_1 şi K_2 se determină din condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} i_1(0) = I_0 \Rightarrow K_1 + K_2 + \frac{u}{R} = I_0 \\ v_C(0) = V_0 \Rightarrow (v_I - v_O)\Big|_{t=0} = V_0 \Leftrightarrow \left(u - L\frac{di_1}{dt}\right)\Big|_{t=0} \Leftrightarrow u - L(K_1 s_1 + K_2 s_2) = V_0 \end{cases}$$

<u>Observaţie</u>

- Dacă soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt simple, atunci soluţia ecuaţiei omogene este de tipul (1.16), cu următoarele situaţii posibile:
  - Regim armonic în cazul rădăcinilor complexe conjugate;
  - Regim aperiodic în cazul rădăcinilor reale.
- Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină dublă $(s_1 = s_2)$, atunci componenta tranzitorie este:

  $$i_{1_t}(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{s_1 \cdot t} \tag{1.18}$$

  În general, unei soluţii s_k (a ecuaţiei caracteristice) cu ordinul de multiplicitate *m*, îi corespunde în soluţia tranzitorie o componentă de tipul:

  $$y(t) = \left(K_0 + K_1 \cdot t + ... + K_{m-1} \cdot t^{m-1}\right) \cdot e^{s_k \cdot t}, \tag{1.19}$$

  y(t) fiind necunoscuta ecuaţiei diferenţiale de rezolvat.

1.3.2. Metoda operaţională

Dacă ecuaţiei (1.10) i se aplică transformata Laplace, atunci aceasta se transformă dintr-o ecuaţie diferenţială într-una algebrică, cu necunoscuta $I_1(s) = L(i_1(t))$. Soluţia se obţine aplicând una din metodele de inversiune (teoremele Heaviside de exemplu) de la calculul operaţional.

Totuşi, principala dificultate a metodei integrării directe nu este rezolvarea ecuaţiei (1.10), ci obţinerea ei din sistemul de ecuaţii (1.7), procedeu care implică utilizarea unor procedee care în multe situaţii se pot dovedi anevoioase, cum sunt derivarea şi/sau integrarea.

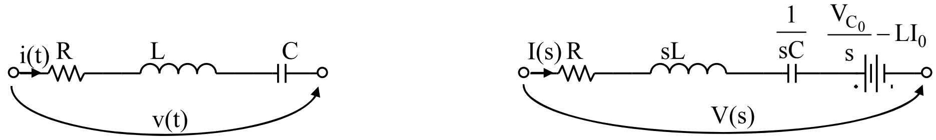
Din acest motiv, este mult mai convenabilă aplicarea transformatei Laplace de la început, adică din momentul analizei circuitului cu ajutorul teoremelor lui Kirchoff sau echivalente ale acestora.

Astfel, (într-un circuit oarecare,) notând $I_K(s)$ şi $V_P(s)$ transformatele Laplace ale curenţilor incidenţi în nodul K, respectiv ale căderilor de tensiune pe componentele ce aparţin buclei P, se obţin formele operaţionale ale teoremelor lui Kirchoff:

$$\begin{cases} \sum i_K(t) = 0 \\ \sum v_P(t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} \begin{cases} \sum I_K(s) = 0 \\ \sum V_P(s) = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

În acest mod, în locul unui sistem de ecuaţii integro-diferenţiale de tipul (1.7), se va obţine aşa numitul „sistem operaţional”, format din ecuaţiile operaţionale, care sunt algebrice după cum s-a menţionat deja mai sus. Soluţia acestuia se va găsi folosind una din metodele cunoscute pentru rezolvarea sistemelor algebrice liniare, obţinându-se astfel transformatele Laplace ale mărimilor ce caracterizează circuitul. Originalele lor se vor obţine cu ajutorul uneia din metodele de inversiune.

Pentru clarificarea ideilor, se va prezenta analiza operaţională a unui circuit RLC, care este cea mai generală formă a unei laturi din orice circuit. Schema este dată în figura 1.3a.



a) b)

Fig.1.3 Exemplu de aplicare a transformatei Laplace unui circuit RLC

a) Circuitul original

b) Circuitul operaţional

Circuitul din figura 1.3a este descris de următoarele relaţii:

$$\begin{cases} v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \\ i(0) = I_0 \\ v_C(0) = V_{C_0} \end{cases} \tag{1.21}$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei (1.21_1) şi ţinând cont de condiţiile iniţiale (1.21_2) şi (1.21_3), se obţine "ecuaţia operaţională":

$$V(s) = R \cdot I(s) + s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot I_0 + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) + \frac{V_{C_0}}{s}$$

care se scrie sub forma (1.22), în care s-a evidenţiat "impedanţa operaţională" Z(s):

$$V(s) = \underbrace{\left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C} \right)}_{Z(s)} \cdot I(s) + \frac{V_{C_0}}{s} - L \cdot I_0, \tag{1.22}$$

obţinându-se astfel "schema operaţională" din figura 1.3b.

Se poate observa analogia între reactanţele (inductivă şi capacitivă) specifice regimului de c.a. sinusoidal şi inductanţa, respectiv capacitatea operaţională. Practic, trecerea de la una la alta se face prin substituirea $j\omega \leftrightarrow s$. Cum însă $s = \sigma + j\omega$ ("frecvenţa complexă"), analogia devine mult mai naturală. Rezultă că circuitul operaţional se rezolvă ca orice circuit de c.a., cu menţiunea că în acest mod se determină (cu ajutorul teoremelor de inversiune) ambele componente ale răspunsului (tranzitorie şi permanentă). În acest mod, este evident că analiza de c.a. este cazul particular $\sigma = 0$ al analizei operaţionale, ceea ce furnizează numai soluţia de regim permanent.

După cum se ştie, în cazul semnalelor cauzale, transformatele Fourier şi Laplace sunt identice ca formă, trecerea de la una la alta obţinându-se cu substituţia $j\omega \leftrightarrow s$. Cum în cazul SAI excitaţiile sunt cauzale, rezultă că analiza de c.a. poate fi privită şi ca aplicarea transformatei Fourier ecuaţiilor integro-diferenţiale asociate acestuia.

Ca exemplificare, se va afla răspunsul SAI din figura 1.2 prin metoda operaţională. În conformitate cu reactanţele operaţionale din (1.22) şi condiţiile iniţiale (1.8), se obţine schema operaţională din figura 1.4.

Folosind formele operaţionale ale teoremelor curenţilor ciclici, se scriu ecuaţiile:

$$\begin{cases} R \cdot (I_1(s) - I_2(s)) + s \cdot L \cdot I_1(s) - L \cdot I_0 = U(s) \\ -R \cdot (I_1(s) - I_2(s)) + \dfrac{1}{s \cdot C} \cdot I_2(s) + \dfrac{V_0}{s} = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Se poate observa că ecuaţiile (1.23) reprezintă transformatele Laplace ale ecuaţiilor (1.7).

În continuare, pentru simplificarea scrierii, se va renunţa la precizarea variabilei s, preferându-se notaţii de tipul I_1 în locul celor de tipul $I_1(s)$.

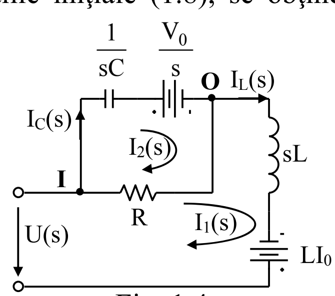


Fig. 1.4

Schema operaţională a SAI din fig. 1.2

Se obţine expresia operaţională a mărimii de ieşire, curentul I_1:

$$I_1 = \frac{(1+s\cdot R\cdot C)\cdot(U+L\cdot I_0)-R\cdot C\cdot V_0}{L\cdot C\cdot R\cdot s^2+s\cdot L+R}$$

Cum $L(u(t))=\frac{1}{s}$, rezultă că $U=\frac{1}{s}$. Folosind şi notaţiile (1.15), rezultă că:

$$I_1(s)=\frac{\left(\frac{s}{L}+\frac{\omega_0^2}{R}\right)\cdot(1+s\cdot L\cdot I_0)-\frac{s}{L}\cdot V_0}{s\cdot\left(s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\omega_0^2\right)}:=\frac{M(s)}{N(s)} \qquad (1.24)$$

Originalul $i_1(t)$ se determină cu ajutorul teoremei lui Heaviside, presupunând că numitorul expresiei (1.24) are rădăcini simple. În caz că există (şi) rădăcini multiple, se va aplica teorema corespunzătoare acestui caz.

$N(s)=0\Leftrightarrow s\cdot\left(s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\omega_0^2\right)=0\Rightarrow s_1=0; s_{2,3}=-\alpha\pm\beta$, unde $\beta=\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$.

$N^{'}(s)=s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\omega_0^2+2\cdot s(s+\alpha)$

$$i_1(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{M(s_k)}{N^{'}(s_k)}\cdot e^{s_k\cdot t}=$$

$$=\frac{1}{R}+e^{-\alpha\cdot t}\left(\frac{\left(\frac{s_2}{L}+\frac{\omega_0^2}{R}\right)(1+s_2L\cdot I_0)-\frac{s_2}{L}V_0}{2\beta s_2}e^{\beta\cdot t}-\frac{\left(\frac{s_3}{L}+\frac{\omega_0^2}{R}\right)(1+s_3L\cdot I_0)-\frac{s_3}{L}V_0}{2\beta s_3}e^{-\beta\cdot t}\right)$$

Se poate observa că numitorul N(s) cuprinde ecuaţia caracteristică (1.14) a ecuaţiei omogene (1.12) şi un factor suplimentar dat de transformata Laplace a excitaţiei. Prin urmare, acestea trebuie să corespundă în funcţia original cu componenta tranzitorie (liberă), respectiv permanentă (forţată).

Dacă se înlocuiesc valorile numerice, se va constata că:

$$\omega_0^2=\frac{10^{12}\pi^2}{20}=5\cdot10^{10}\pi^2;\ \alpha=\frac{10^6\pi}{10}=10^5\pi;\ \beta=\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=j\cdot2\cdot10^5\pi$$

Rezultă că regimul tranzitoriu al SAI va fi armonic, cu frecvenţa 100kHz. Expresia curentului $i_1(t)$ devine în acest caz:

$$i_1(t)=\frac{1}{R}+e^{-\alpha\cdot t}\left(\left(\frac{1-V_0}{\beta\cdot L}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot I_0-\frac{1}{R}\right)\cdot\sin(\beta\cdot t)+\left(I_0-\frac{1}{R}\right)\cdot\cos(\beta\cdot t)\right) \qquad (1.25)$$

în care s-a renotat cu β partea sa imaginară, iar termenii "1" $\left(1-V_0;\frac{1}{R}\right)$ trebuie înţeleşi că reprezintă 1V (valoarea excitaţiei, u(t)). În acest mod, se poate constata cu uşurinţă că expresia (1.25) este consistentă din punct de vedere dimensional.

Numeric, rezultă:

$$i_1(t)=1+e^{-10^5\pi\cdot t}\left(\left(\frac{5\cdot(1-V_0)}{4}+\frac{1}{2}\cdot I_0-1\right)\cdot\sin\left(2\cdot10^5\pi\cdot t\right)+(I_0-1)\cdot\cos\left(2\cdot10^5\pi\cdot t\right)\right).$$

De exemplu, cu condiţii iniţiale nule, rezultă:

$$i_1(t)=1+e^{-10^5\cdot\pi\cdot t}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\sin\left(2\cdot10^5\pi\cdot t-\mathrm{arctg}(4)\right).$$

<u>Observaţii</u>

- Regimul tranzitoriu este puternic amortizat datorită valorii mari a parametrului α. Practic, durata sa nu depăşeşte $10\,\mu s$, adică o perioadă a oscilaţiei proprii.

- Sistemul este stabil, întrucât componenta sa tranzitorie este amortizată $\left(\lim_{t\to\infty} i_{1_{tr}}(t)=0\right)$. Rezultă de aici că un **SAI este stabil dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală negativă**. Dacă partea lor reală este nulă, atunci SAI este la limita stabilităţii (în (1.25), dacă $\alpha=0$, atunci regimul tranzitoriu este neamortizat, rezultând o oscilaţie de amplitudine constantă), iar în cazul unor rădăcini cu partea reală pozitivă, SAI este instabil (în (1.25), dacă $-\alpha>0$, atunci regimul tranzitoriu este nemărginit: $\lim_{t\to\infty} i_{1_{tr}}(t)=\infty$).

1.3.3. Funcţia de transfer

Se defineşte funcţia de transfer (**FDT**) a unui sistem raportul dintre transformatele Laplace ale semnalelor de ieşire, respectiv intrare ale unui SAI cu condiţii iniţiale nule:

$$H(s) := \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{1.26}$$

Funcţia de transfer mai poate fi întâlnită şi sub denumirea de funcţie de sistem.
Dacă X(s) şi Y(s) au aceeaşi semnificaţie fizică, atunci FDT se mai numeşte câştig şi este uzuală notaţia G(s) (Gain). După cum $|G(s)>1|$ sau $|G(s)<1|$, câştigul se mai numeşte amplificare, respectiv atenuare.
Definiţia (1.26) se poate scrie echivalent sub forma:

$$Y(s)=X(s)\cdot H(s), \tag{1.27}$$

şi ţinând cont de teorema produsului de convoluţie:

$$L(x(t)\otimes h(t))=X(s)\cdot H(s) \tag{1.28}$$

rezultă că răspunsul poate fi determinat (şi) prin convoluţia semnalului de intrare (cauzal) cu funcţia de transfer, h(t):

$$y(t)=x(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \tag{1.29}$$

De asemenea, se poate observa în (1.26) că dacă $X(s)=1$, atunci $Y(s)=H(s)$. Cum se ştie că transformata Laplace a impulsului Dirac este:

$$L(\delta(t))=1,$$

rezultă că FDT este răspunsul sistemului atunci când excitaţia este $x(t)=\delta(t)$.
Din acest motiv, L^{-1}(FDT) se mai numeşte şi **funcţie pondere**, h(t), a sistemului, adică răspunsul acestuia la impulsul Dirac.

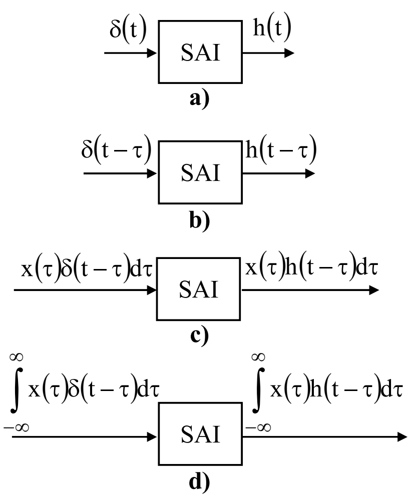


Fig. 1.5
Deducerea răspunsului prin convoluţie

Aceste afirmaţii pot fi demonstrate (şi) mai riguros, deoarece premisa raţionamentelor anterioare este aceea că FDT a unui SAI nu depinde de excitaţie, ceea ce poate fi considerat ca evident, pentru că în caz contrar trebuie acceptată ideea că sistemul îşi adaptează comportamentul după excitaţie.
Astfel, se va considera că h(t) este răspunsul sistemului la excitaţia $x(t)=\delta(t)$ (figura 1.5a). Cum x(t) este invariant la convoluţia cu $\delta(t)$:

$$x(t)=x(t)\otimes\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau,$$

sau, ţinând cont de cauzalitatea excitaţiei x(t):

$$x(t)=x(t)\otimes\delta(t)=\int_{0}^{\tau} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

Altfel spus, excitaţia poate fi considerată că este constituită din eşantioanele sale elementare $x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$ (figura 1.5c). Cum SAI este invariant în timp ($\delta(t)\to h(t)\Rightarrow\delta(t-\tau)\to h(t-\tau)$ – figura 1.5b), şi liniar ($(x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\to x(\tau)\cdot h(t-\tau))$ – figura 1.5c), prin superpoziţia răspunsurilor elementare (corespunzătoare superpoziţiei excitaţiilor elementare), se obţine răspunsul global – figura 1.5d:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau,$$

adică

$$y(t)=\int_{0}^{t} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = x(t)\otimes h(t) \Leftrightarrow Y(s)=X(s)\cdot H(s).$$

Importanţa cunoaşterii funcţiei pondere este evidentă: cu ajutorul ei se poate determina răspunsul SAI la oricare altă excitaţie, cu ajutorul (1.29).

În mod similar, se defineşte funcţia indicială a SAI (**răspunsul indicial**), r(t), ca răspunsul sistemului la semnalul treaptă unitate $(x(t)=u(t))$.

Ţinând cont de (1.29), se scrie că:

$$r(t)=u(t)\otimes h(t)=\int_{0}^{t} h(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} h(\tau)d\tau \tag{1.30}$$

În continuare se va căuta o relaţie de tipul (1.29), adică determinarea răspunsului y(t) la o excitaţie oarecare, dacă r(t) este cunoscut. Ţinând cont că în produsul de convoluţie se poate aplica derivarea şi integrarea, din (1.29) rezultă:

$$y(t)=x'(t)\otimes \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \underset{(1.30)}{=} x'(t)\otimes r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\cdot r(t-\tau)d\tau \tag{1.31}$$

În domeniul frecvenţă, relaţia (1.31) devine:

$$Y(s)=s\cdot X(s)\cdot R(s) \tag{1.32}$$

<u>Aplicaţie</u>: Să se determine răspunsul sistemului din figura 1.6a, excitaţia fiind tensiunea reprezentată în figura 1.6b.

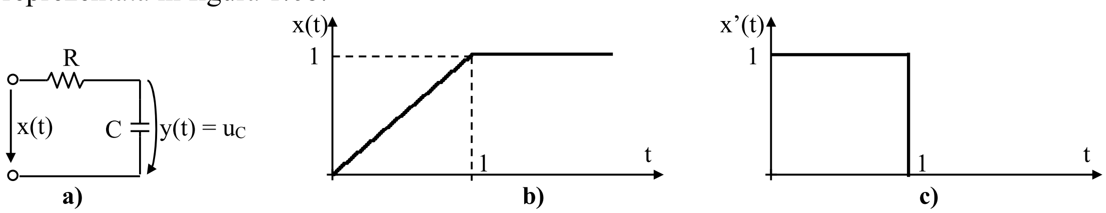


Fig. 1.6
Determinarea răspunsului cu ajutorul funcţiei indiciale

Funcţia de transfer:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{s\cdot C}}{R+\frac{1}{s\cdot C}}=\frac{1}{1+s\cdot R\cdot C}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{R\cdot C}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

Conform (1.30), rezultă răspunsul la u(t):

$$r(t)=\int_{0}^{t} h(\tau)d\tau=\frac{1}{R\cdot C}\cdot\int_{0}^{t} e^{-\frac{\tau}{R\cdot C}}d\tau=-e^{-\frac{\tau}{R\cdot C}}\Big|_{0}^{t}=1-e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

Cum $x'(t)=u(t)$ pentru $t\in[0;1]$, conform (1.31) rezultă:

$$y(t)=x'(t)\otimes r(t)=\int_{0}^{t} x'(\tau)\cdot r(t-\tau)d\tau$$

Dar (figura 1.6c) $x'(t)=\begin{cases} u(t) & \text{pentru} \quad t\in[0;1] \\ 0 & \text{pentru} \quad t>1 \end{cases}$, rezultă că:

$$y(t)=\int_0^t x'(\tau)\cdot r(t-\tau)d\tau=\int_0^t x'(\tau)\cdot\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{R\cdot C}}\right)d\tau=$$

$$=\begin{cases} t+R\cdot C\cdot\left(e^{-\frac{t}{R\cdot C}}-1\right) & \text{pentru} \quad t\in[0;1] \\ 1+R\cdot C\cdot\left(e^{-\frac{t}{R\cdot C}}-e^{-\frac{t-1}{R\cdot C}}\right) & \text{pentru} \quad t>1 \end{cases}$$

1.4. ALGEBRA FUNCŢIILOR DE TRANSFER

Mai multe sisteme, fiecare dintre ele fiind caracterizat de o funcţie de transfer, pot fi interconectate între ele. **Algebra funcţiilor de transfer** stabileşte reguli de calcul a FDT pentru sistemul obţinut astfel.

- **Legarea în cascadă**

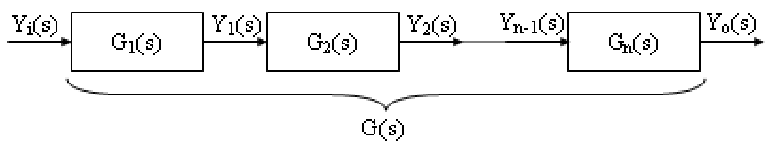


Fig. 1.7
Legarea în cascadă a sistemelor

În figura 1.7 se poate observa că legarea în cascadă (cascadarea) înseamnă conectarea ieşirii unui sistem la intrarea următorului. Rezultă că:

$$\left.\begin{aligned} G_1(s)&=\frac{Y_1(s)}{Y_i(s)} \\ G_2(s)&=\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \\ &\dots \\ G_n(s)&=\frac{Y_o(s)}{Y_{n-1}(s)} \end{aligned}\right\}\Rightarrow G(s)=\frac{Y_o(s)}{Y_i(s)}=G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot\ldots\cdot G_n(s) \tag{1.33}$$

- **Legarea în paralel**

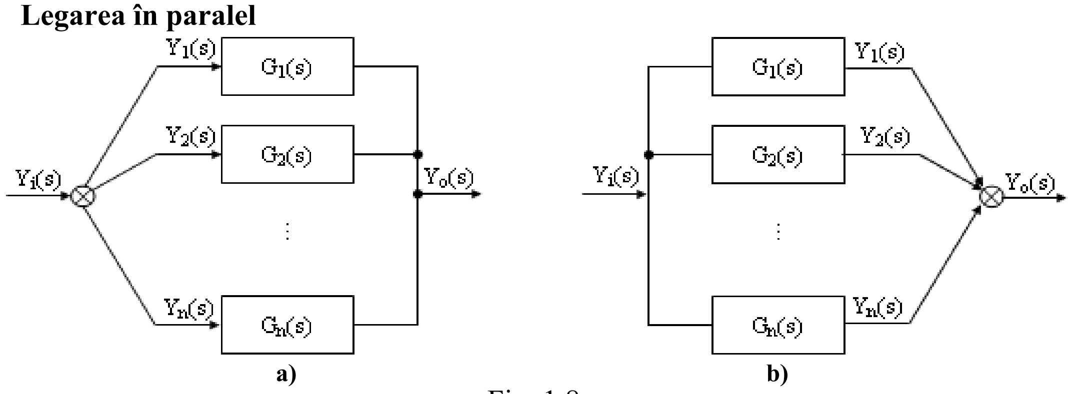


Fig. 1.8
Legarea în paralel a sistemelor:
a) cu elemental de comparaţie la intrare; b) cu elemental de comparaţie la ieşire

✓ **Cu elementul de comparaţie la intrare**

Schema unei astfel de conexiuni poate fi urmărită în figura 1.8a. Mărimea de intrare este:

$$Y_i(s)=Y_1(s)\pm Y_2(s)\pm\ldots\pm Y_n(s)$$

Rezultă că:

$$\left.\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{Y_o(s)}{Y_1(s)} \\ G_2(s) &= \frac{Y_o(s)}{Y_2(s)} \\ &\ldots \\ G_n(s) &= \frac{Y_o(s)}{Y_{n-1}(s)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(s) = \frac{Y_o(s)}{Y_i(s)} = \frac{Y_o(s)}{Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm \ldots \pm Y_n(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G_1(s)} \pm \frac{1}{G_2(s)} \pm \ldots \pm \frac{1}{G_n(s)}}$$

Funcţia de transfer a sistemului echivalent devine în acest caz:

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{1}{G_1(s)} \pm \frac{1}{G_2(s)} \pm \ldots \pm \frac{1}{G_n(s)} \tag{1.34}$$

✓ **Cu elementul de comparaţie la ieşire**

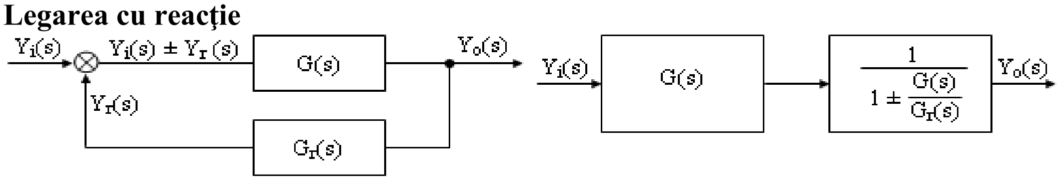
Schema unei astfel de conexiuni poate fi urmărită în figura 1.8b. Mărimea de ieşire este:

$$Y_o(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm \ldots \pm Y_n(s)$$

Rezultă că funcţia de transfer a sistemului echivalent devine în acest caz:

$$G(s) = \frac{Y_o(s)}{Y_i(s)} = \frac{Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm \ldots \pm Y_n(s)}{Y_i(s)} = G_1(s) \pm G_2(s) \pm \ldots \pm G_n(s) \tag{1.35}$$

- **Legarea cu reacţie**



a) b)

Fig. 1.9

Legarea cu reacţie a sistemelor:

a) Schema de principiu; b) Schema echivalentă

Schema unei astfel de conexiuni poate fi urmărită în figura 1.9a. Se poate observa că legarea cu reacţie este cazul particular (dar deosebit de important) $n = 2$ de legare paralel cu elementul de comparaţie la intrare.

Din (1.34) rezultă funcţia de transfer a sistemului cu reacţie:

$$G_o(s) = \frac{G(s) \cdot G_r(s)}{G(s) \pm G_r(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm \frac{G(s)}{G_r(s)}} \tag{1.36}$$

unde s-a notat $G_o(s)$ funcţia de transfer a sistemului cu reacţie, G(s) funcţia de transfer a sistemului fără reacţie (în buclă deschisă) şi cu $G_r(s)$ funcţia de transfer a sistemului de reacţie. Dacă în (1.36) semnul este “**plus**” (semnalul de reacţie şi cel de intrare sunt în fază), atunci reacţia se numeşte **pozitivă**, iar dacă semnul este “**minus**” (semnalul de reacţie şi cel de intrare sunt în antifază), atunci reacţia se numeşte **negativă**. Se poate observa că reacţia înseamnă practic aducerea la intrare a unei fracţiuni din semnalul de ieşire.

Dacă reacţia este totală $(G_r(s) = 1 \Leftrightarrow Y_r(s) = Y_o(s))$, atunci (1.36) devine:

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)} \tag{1.36a}$$

Se mai poate observa că legarea cu reacţie poate fi echivalată cu cascadarea a două sisteme cu funcţiile de transfer G(s) şi $\frac{1}{1 \pm \frac{G(s)}{G_r(s)}}$ (figura 1.9b).

2. ANALIZA ÎN FRECVENȚĂ A SISTEMELOR ELECTRICE ŞI ELECTRONICE

În paragrafele anterioare s-au prezentat metode de analiză a comportării SAI în (domeniul) timp. Punctul comun al metodelor prezentate este determinarea funcției de transfer, H(s), diferența între ele fiind dată de modul în care se lucrează cu aceasta pentru determinarea răspunsului y(t).
Rezultă că se poate pune problema determinării comportamentului SAI (adică a FDT) în domeniul "s", adică dependența $H = H(s)$ (analiza în domeniul "s").
Cum însă $s = \sigma + j\omega$ ("frecvența complexă"), iar partea sa reală, σ este cea care caracterizează regimul tranzitoriu, rezultă că prin substituția $s \to j\omega$, H(s) devine $H(j\omega)$ şi astfel se poate studia dependența $H = H(j\omega)$ (analiza în frecvență). Cum H(s) sau $H(j\omega)$ se exprimate printr-un raport (în majoritatea situațiilor adimensional, adică $Y(j\omega)$ şi $X(j\omega)$ au aceeaşi semnificație fizică), se vor reaminti câteva noțiuni în legătură cu exprimarea unor astfel de mărimi.

2.1. EXPRIMAREA LOGARITMICĂ A MĂRIMILOR DEFINITE CA RAPOARTE

Logaritmii prezintă proprietatea de a transforma produsele în sume:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Deoarece algebra funcțiilor de transfer presupune lucrul cu rapoarte, este mult mai comodă logaritmarea acestora.
Decibelul (**dB**) este prin definiție o unitate de măsură logaritmică ce exprimă valoarea unei mărimi fizice (de obicei putere), **raportată** la o valoare de referință (implicită sau explicită) a acesteia.
Exprimând valoarea unui raport între două mărimi exprimate în aceleaşi unități, desigur că dB este o unitate (de "măsură") adimensională; 1dB este a zecea parte dintr-un Bel (B).
Exprimarea în decibeli este extrem de folositoare în ştiință şi tehnică (de exemplu în acustică şi electrotehnică/electronică), conferind avantaje ca:

- înlocuirea înmulțirii rapoartelor cu adunări/scăderi;
- posibilitatea exprimării convenabile a numerelor foarte mici sau foarte mari;
- exprimarea mărimilor în unități logaritmice, ceea ce corespunde mai bine percepției umane (a sunetului sau a luminii de exemplu).

Exprimarea rapoartelor de puteri (electrice) – sau amplificarea în putere – în decibeli este:

$$\left.\frac{P_o}{P_i}\right|_{dB} = 10 \cdot \lg \frac{P_o}{P_i} \tag{2.1}$$

unde P_i este puterea de la intrarea circuitului, iar P_o, puterea de la ieşirea circuitului.
În domeniul mărimilor electrice, pentru a defini în dB raportul între două tensiuni sau curenți (amplificarea în tensiune/curent) se utilizează relația:

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{U_o \cdot I_o}{U_i \cdot I_i}$$

Dacă cele două tensiuni U_o şi U_i se aplică succesiv aceleiaşi rezistențe (impedanțe), sau simultan pe două rezistențe (impedanțe) identice, în care se produc curenții I_o şi I_i, atunci:

$$\frac{P_o}{P_i}=\frac{U_o\cdot I_o}{U_i\cdot I_i}=\frac{\frac{U_o^2}{R}}{\frac{U_i^2}{R}}=\left(\frac{U_o}{U_i}\right)^2 \text{ sau } \frac{P_o}{P_i}=\frac{U_o\cdot I_o}{U_i\cdot I_i}=\frac{R\cdot I_o^2}{R\cdot I_i^2}=\left(\frac{I_o}{I_i}\right)^2$$

şi din (2.1) se obţine:

$$\left.\frac{P_o}{P_i}\right|_{dB}=10\cdot\lg\frac{P_o}{P_i}=20\cdot\lg\frac{U_o}{U_i}=20\cdot\lg\frac{I_o}{I_i} \qquad (2.2)$$

Concluzie:
La un număr dat de decibeli raportul puterilor corespunde pătratului raportului tensiunilor respectiv curenţilor, ca în tabelul 2.1.

Tab 2.1

Corespondenţa dintre un număr dat de dB şi raportul puterilor, raportul tensiunilor respectiv curenţilor.

$\frac{P_o}{P_i}$	1,259	1,585	2,512	3,162	3,981	5,012	6,310	7,943	10	100
X [dB]	1	2	4	5	6	7	8	9	10	20
$\frac{U_o}{U_i};\frac{I_o}{I_i}$	1,122	1,259	1,585	1,778	1,995	2,239	2,512	2,818	3,162	10

Exemple:
1. Puterea de intrare într-un amplificator este $P_i=0{,}1\text{mW}$, iar cea de ieşire este $P_o=1\text{W}$. Amplificarea în putere exprimată în dB va fi:

$$A_p=10\cdot\lg\frac{P_o}{P_i}=10\cdot\lg\frac{1\text{W}}{10^{-4}\text{W}}=40\,\text{dB}$$

2. Dacă tensiunea de intrare este $U_i=10\,\text{mV}$, iar cea de ieşire este $U_o=10\text{V}$ amplificarea în tensiune va fi:

$$A_V=20\cdot\lg\frac{U_o}{U_i}=20\cdot\lg\frac{10\text{V}}{10^{-2}\text{V}}=60\,\text{dB}$$

3. Unele circuite atenuează semnalele. Astfel dacă, de exemplu, la intrarea într-o linie telefonică tensiunea are valoarea de 0,7 V şi la ieşirea din linie tensiunea este de 0,07 V, atenuarea în dB va fi:

$$a=20\cdot\lg\frac{U_0}{U_i}=20\cdot\lg\frac{0{,}07\,\text{V}}{0{,}7\,\text{V}}=-\,20\,\text{dB}$$

Altfel spus, dacă valoarea în dB a funcţiei de transfer a circuitului este pozitivă, atunci se spune că circuitul amplifică, iar funcţia de transfer se notează în mod uzual cu “A”; dacă valoarea în dB a funcţiei de transfer a circuitului este negativă, atunci se spune că circuitul atenuează, iar funcţia de transfer se notează în mod uzual cu “a”.

Observaţii:
În cadrul definiţiei s-a specificat că referinţa (numitorul) raportului ce se exprimă în decibeli poate fi implicită sau explicită. În cazurile prezentate, este evident că referinţa este explicită (valoarea puterii, respectiv a tensiunii/curentului de intrare), astfel că decibelul rezultă ca o unitate de măsură relativă.

Dacă nivelul de referință (sau, echivalent, nivelul de 0dB) este implicit, atunci decibelul devine o unitate de măsură absolută, simbolul dB fiind însoțit în aceste cazuri de sufixe explicative. De exemplu:

1. Dacă $P_{ref} = 1mW$, atunci exprimarea puterii în **dBm** (**m**illiwatt) este:

$$P_o\big|_{dBm} = 10 \cdot \lg \frac{P_o}{1mW} \tag{2.3}$$

(de 10 ori logaritmul zecimal al puterii P_o, exprimată în miliwatts).

2. În tehnica audio, o unitate des folosită este **dBu** (**u**nloaded; de asemenea, **u** "seamănă" cu **v**, dBv fiind vechiul nume al acestei unități). Referința acestei unități de măsură este o tensiune a cărei valoare efectivă (RMS – Root Mean Square) este $U_{ref} = 0{,}775V$. Această valoare a fost aleasă din rațiuni istorice, deoarece o tensiune de 0,775V dezvoltă o putere de 1mW într-o rezistență de 600Ω, ce era valoarea standard a impedanței circuitelor audio profesionale caracterizate de impedanță mică. Rezultă că:

$$U_o\big|_{dBu} = 20 \cdot \lg \frac{U_o}{0{,}775V} \tag{2.4}$$

3. Dacă $U_{ref} = 1V_{RMS}$, atunci exprimarea tensiunii în **dBV** este:

$$U_o\big|_{dBV} = 20 \cdot \lg \frac{U_o}{1V} \tag{2.5}$$

(de 10 ori logaritmul zecimal al tensiunii U_o, exprimată în volts).

4. În acustică, dB este folosit pentru exprimarea nivelului sunetului. Se foloseşte ca o unitate de măsură absolută, nivelul de referință al presiunii fiind $p_0 = 20\mu Pa$ (care este acceptat ca fiind pragul de audibilitate al unei urechi normale; aproximativ "zgomotul" produs de un țânțar aflat la o distanță de cca. 3m; $1\,Pa = 1\frac{N}{m^2}$; $1\,atm \cong 10^5\,Pa$). Deşi notarea corectă a acestei unități de măsură ar fi **dB$_{SPL}$** (**S**ound **P**ressure **L**evel), totuşi notația uzuală este dB. Rezultă că nu trebuie confundată exprimarea relativă a unor rapoarte în dB cu exprimarea absolută a nivelului sonor în "aceeaşi" unitate de măsură:

$$L_p\big|_{dB} = 20 \cdot \lg \frac{p}{2 \cdot 10^{-5}\,Pa} \tag{2.6}$$

5. **Variația minimă** de intensitate sonoră, perceptibilă pentru o ureche normală – mijlocie, fără încordarea atenției, este de 25,9 %, corespunzătoare unui raport de energii sau puteri acustice:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1{,}259 \cong 10^{10^{-1}} \tag{2.7}$$

Din acest motiv s-au adoptat logaritmii zecimali pentru exprimările logaritmice prezentate. De asemenea, exprimarea logaritmică este consecința naturală a legii fiziologice generale ale lui Weber – Fechner: "Intensitatea senzației creşte cu logaritmul excitației".

6. În tehnică se mai foloseşte încă o unitate logaritmică de măsurare a raportului de puteri: neperul. Numărul de neperi corespunzător unui raport oarecare de puteri $\frac{P_o}{P_i}$ se calculează cu relația:

$$X = \ln \frac{P_o}{P_i} = 2{,}3 \cdot \lg \frac{P_o}{P_i}\ [Np], \tag{2.8}$$

expresie ce provine din simpla schimbare a bazei logaritmilor ($2{,}3 \cong \ln 10$). Corespondența dintre cele două unități de măsurare este următoarea:

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{dB} &= 8{,}686\,\mathrm{Np} \\ 1\,\mathrm{Np} &= 0{,}1151\,\mathrm{dB} \end{aligned} \qquad (2.9)$$

2.2. CARACTERISTICI DE FRECVENȚĂ

Se știe că un număr complex $z = x + jy$ se poate exprima sub forma (trigonometrică):

$$z = x + jy = |z| \cdot e^{j \cdot \arg(z)}$$

unde:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (modulul numărului complex)}$$

$$\arg(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (argumentul numărului complex).}$$

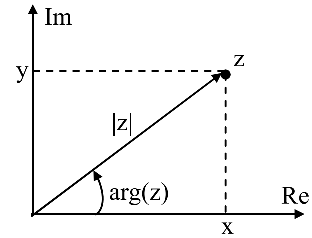


Fig.2.1
Reprezentarea numerelor complexe în plan

Modulul și argumentul se pot observa și în figura 2.1.
În tehnică, argumentul se mai numește și fază.
Rezultă că se vor defini următoarele caracteristici de frecvență:

- Caracteristica de amplitudine: $A(\omega) = |H(j\omega)|$ (2.10)
- Caracteristica de fază: $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ (2.11)
- Timpul de întârziere (propagare) de grup: $\tau_g = -\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ (2.12)

  sau, (mai) pe scurt, întârzierea de grup.

Cele mai folosite sunt caracteristicile de amplitudine și de fază.
Reprezentarea punct cu punct a variațiilor (2.10) și (2.11) în raport cu frecvența poate necesita un mare volum de muncă. Din acest motiv s-a elaborat o metodă aproximativă care permite trasarea rapidă a acestor caracteristici, diagramele rezultate fiind cunoscute sub numele de **caracteristici Bode**. Metoda se bazează pe utilizarea funcției de transfer sub formă logaritmică, reprezentarea făcându-se în funcție de logaritmul (zecimal al) frecvenței.
Modul de trasare a caracteristicilor Bode poate fi înțeles cel mai bine pe un exemplu.
Fie următoarea funcție de transfer (**FDT**):

$$H(j \cdot \omega) = K \cdot \frac{(j \cdot \omega \cdot \tau)^m \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_1)^n \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_3)^p}{(1 + j \cdot \omega \cdot \tau_2)^u \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_4)^v} \qquad (2.13)$$

Definiție:

- **Rădăcinile numărătorului** funcției de transfer se numesc **zerouri**;
- **Rădăcinile numitorului** funcției de transfer se numesc **poli**.

Rezultă că zerourile (polii) unei funcții de transfer pot fi simple (simpli) sau multiple (multipli), de un anumit ordin (ca în exemplul de față).
Cu notațiile:

$$K_1 = \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_1)^2}$$
$$K_2 = \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_2)^2}$$
$$K_3 = \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_3)^2}$$
$$K_4 = \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_4)^2},$$

funcția de transfer (2.13) se poate scrie sub formă trigonometrică:

$$H(j\cdot\omega)=K\cdot\frac{(\omega\tau)^m\cdot\exp\left(j\cdot m\frac{\pi}{2}\right)\cdot K_1^n\cdot\exp(j\cdot n\cdot \mathrm{arctg}(\omega\tau_1))\cdot K_3^p\cdot\exp(j\cdot p\cdot \mathrm{arctg}(\omega\tau_3))}{K_2^u\cdot\exp(j\cdot u\cdot \mathrm{arctg}(\omega\tau_2))\cdot K_4^v\cdot\exp(j\cdot v\cdot \mathrm{arctg}(\omega\tau_4))}=$$
$$=A(\omega)\cdot\exp(j\cdot\varphi(\omega))$$

unde:

$$A(\omega)=\frac{K\cdot K_1^n\cdot K_3^p\cdot(\omega\cdot\tau)^m}{K_2^u\cdot K_4^v} \tag{2.14}$$

$$\varphi(\omega)=m\cdot\frac{\pi}{2}+n\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_1)+p\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_3)-u\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_2)-v\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_4) \tag{2.15}$$

Exprimarea logaritmică a funcției de transfer este:

$$\ln[H(j\cdot\omega)]=\ln[A(\omega)]+j\cdot\varphi(\omega) \tag{2.16}$$

Din (2.14), (2.15) şi (2.16), rezultă expresiile celor două caracteristici Bode:

- Caracteristica de amplitudine (exprimată în dB):

$$\begin{aligned}A(\omega)\big|_{dB}&=\frac{20}{\ln 10}\cdot \mathrm{Re}\{\ln[H(j\cdot\omega)]\}=\\&=20\cdot\left[\lg(K)+\lg(K_1^n)+\lg(K_3^p)+\lg(\omega\tau)^m-\lg(K_2^u)-\lg(K_4^v)\right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

- Caracteristica de fază:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega)&=\mathrm{Im}\{\ln[H(j\cdot\omega)]\}=\\&=m\cdot\frac{\pi}{2}+n\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_1)+p\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_3)-u\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_2)-v\cdot \mathrm{arctg}(\omega\cdot\tau_4)\end{aligned} \tag{2.18}$$

Din (2.17) şi (2.18) se deduc următoarele “reguli” de scriere a celor două componente ale funcției de transfer:

- Modulul total în dB se determină prin sumarea algebrică a valorilor modulelor în dB ale factorilor FDT;
- Unghiul de fază (defazajul) se află prin sumarea algebrică a argumentelor fiecărui factor al FDT.

În general, FDT pot cuprinde:

- Factori independenți de frecvență: K;
- Factori corespunzând unor zerouri/poli în origine, cu ordinul de multiplicitate m: $(j\cdot\omega\cdot\tau)^{\pm m}$;
- Factori corespunzând unor zerouri/poli, cu ordinul de multiplicitate m: $(1+j\cdot\omega\cdot\tau)^{\pm m}$;
- Factori corespunzând unor zerouri/poli cuadratici, cu ordinul de multiplicitate m: $\left[\left(j\cdot\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+2\cdot j\cdot\delta\cdot\frac{\omega}{\omega_0}+1\right]^{\pm m}$.

Caracteristicile de frecvență se reprezintă folosind o **scară logaritmică pe abscisă** (axa frecvențelor) şi una **liniară pe axa ordonatelor** (dB pentru caracteristica de amplitudine şi grade sau radiani pentru caracteristica de fază).

2.2.1 Caracteristica de frecvență corespunzătoare constantelor

Constanta (sau factorul independent de frecvență) K se reprezintă grafic pe baza relației:

$$K\big|_{dB}=20\cdot\lg K \tag{2.19}$$

Unde K reprezintă produsul tuturor factorilor in dependenți de frecvență ai FDT. Relația (2.19) este reprezentată în figura 2.2, pentru $K>1$.

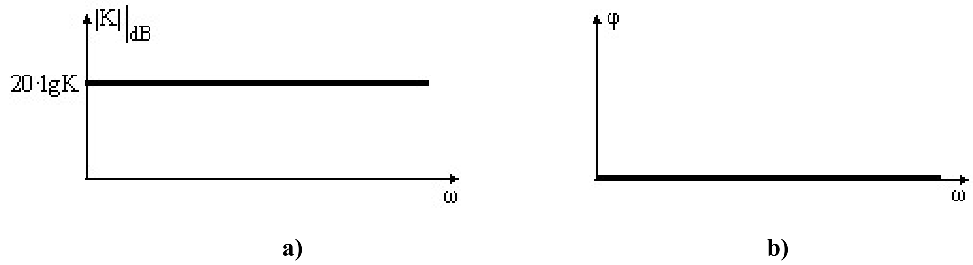


Fig. 2.2. Caracteristicile de frecvență ale unei constante:
a) Caracteristica de amplitudine;
b) Caracteristica de fază

2.2.2 Caracteristica de frecvență corespunzătoare zerourilor şi polilor în origine

Caracteristica logaritmică în acest caz devine:

$$\ln(j \cdot \omega \cdot \tau)^{\pm m} = \pm m \cdot \ln(\omega \cdot \tau) \pm j \cdot m \cdot 90^{o} \qquad (2.20)$$

Rezultă că $|A|_{dB} = \pm 20 \cdot m \cdot \lg(\omega \cdot \tau)$, iar $\varphi = \pm m \cdot 90^{o}$, pentru zerouri cu semnul "+", iar pentru poli cu semnul "–".

Se defineşte **decada** (dec) ca fiind orice interval $[\omega; 10 \cdot \omega]$ ($\lg\omega$ variază cu o unitate). Se poate observa că panta caracteristicii de amplitudine (liniară, datorită adoptării scării logaritmice pe abscisă) este $\pm 20\frac{dB}{dec}$.

Relațiile (2.20) sunt reprezentate în figura 2.3.

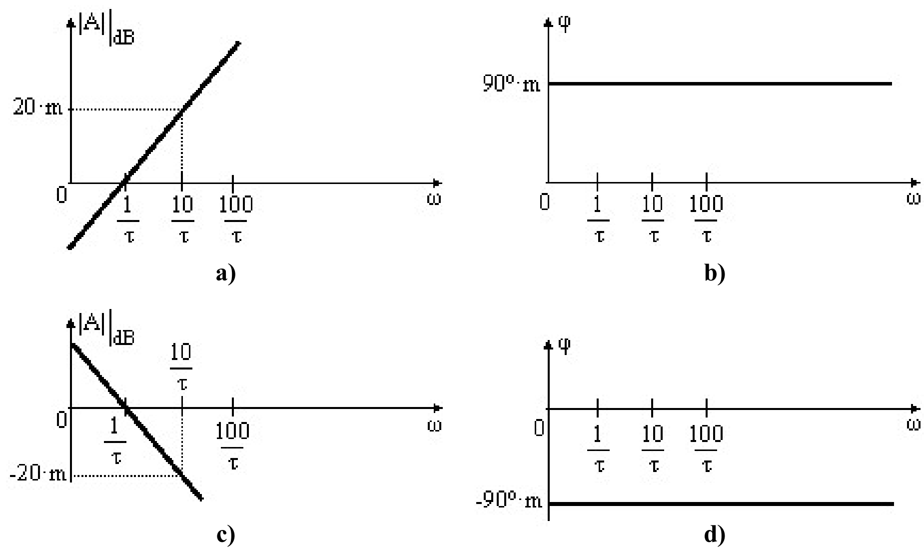


Fig. 2.3. Caracteristicile de frecvență ale zerourilor/polilor în origine:
a) Caracteristica de amplitudine pentru zerouri multiple de ordinul m;
b) Caracteristica de fază pentru zerouri multiple de ordinul m;
c) Caracteristica de amplitudine pentru poli multipli de ordinul m;
d) Caracteristica de fază pentru poli multipli de ordinul m.

Observație

S-a specificat faptul că pe axa frecvențelor (sau pulsațiilor, ω, proporționale cu frecvența: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$) se va folosi o scară logaritmică. Aceasta înseamnă că pe abscisă se reprezintă de fapt poziția valorilor $\lg\omega$, ceea ce face ca punctele ω şi $10 \cdot \omega$ să fie echidistante (unitatea pe axa frecvențelor este o decadă). Întrucât în expresiile FDT apar mărimile (**adimensionale**!) $\omega \cdot \tau$, la reprezentările grafice din figura 2.3 s-a folosit ca variabilă pe axa frecvențelor mărimea $\lg(\omega \cdot \tau)$. Pentru a face graficele mai uşor de interpretat (a nu se uita că discuția are ca subiect caracteristicile de **frecvență**), s-a preferat reprezentarea pe axă a valorilor frecvențelor corespunzătoare decadelor mărimii $\omega \cdot \tau$, în locul notațiilor lipsite de conținut, ca: 1 în loc de $\frac{1}{\tau}$, 10 în loc de $\frac{10}{\tau}$, 100 în loc de $\frac{100}{\tau}$ etc. Aceeaşi convenție va fi folosită şi la caracteristicile ce vor urma în continuare. Evident că, datorită scării logaritmice, punctele respective $\left(\frac{1}{\tau}, \frac{10}{\tau}, \frac{100}{\tau}, \ldots\right)$ vor fi echidistante pe axa absciselor, după cum deja s-a menționat (şi reiese clar din cele de) mai sus.

2.2.3 Caracteristica de frecvență corespunzătoare zerourilor şi polilor oarecare

Caracteristica logaritmică în acest caz devine:

$$\ln(1 + j \cdot \omega \cdot \tau)^{\pm m} = \pm \frac{m}{2} \cdot \ln\left(1 + (\omega \cdot \tau)^2\right) \pm j \cdot m \cdot \mathrm{arctg}(\omega \cdot \tau) \qquad (2.21)$$

Rezultă că $|A|_{dB} = \pm 20 \cdot \frac{m}{2} \cdot \lg\left(1 + (\omega \cdot \tau)^2\right)$, iar $\varphi = \pm m \cdot \mathrm{arctg}(\omega \cdot \tau)$, pentru zerouri cu semnul "+", iar pentru poli cu semnul "–".

Relațiile (2.21) sunt reprezentate în figura 2.4.

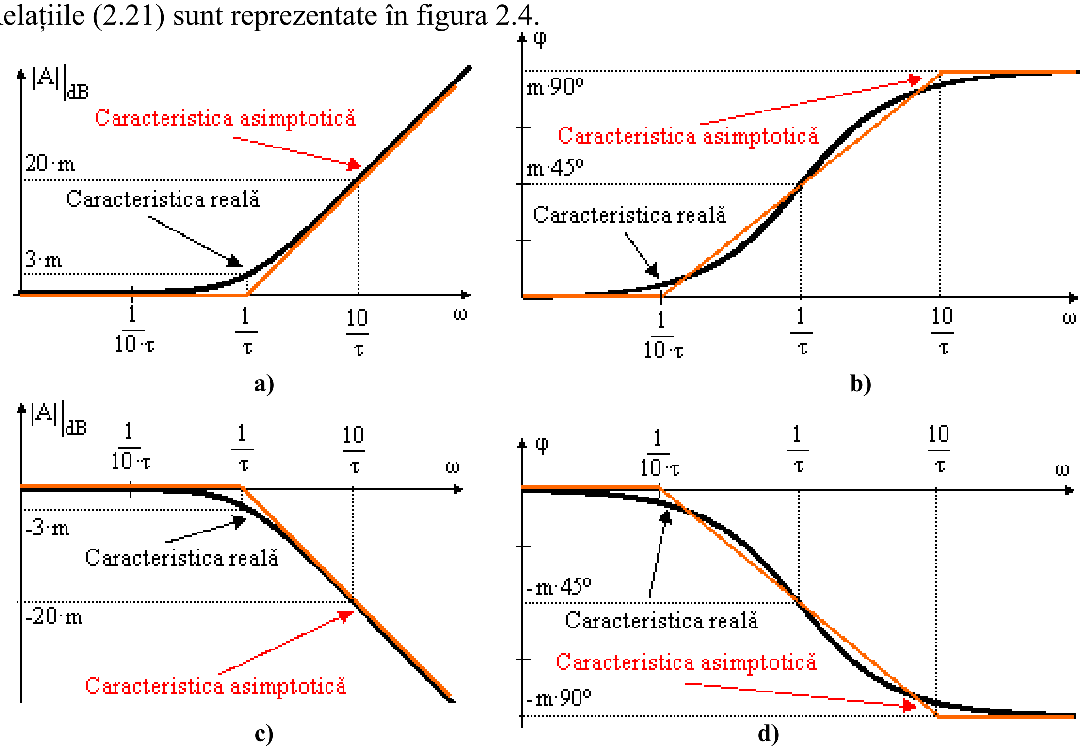


Fig. 2.4. Caracteristicile de frecvență ale zerourilor/polilor oarecare:
a) Caracteristica de amplitudine pentru zerouri multiple de ordinul m;
b) Caracteristica de fază pentru zerouri multiple de ordinul m;
c) Caracteristica de amplitudine pentru poli multipli de ordinul m;
d) Caracteristica de fază pentru poli multipli de ordinul m.

În figurile 2.4 s-au reprezentat atât caracteristicile reale, cât şi cele asimptotice. Acestea din urmă reprezintă aproximări (liniarizări) ale celor reale şi se obțin după cum urmează:

- Pentru valori $\omega << \frac{1}{\tau}$, adică $\left(\omega \leq \frac{1}{10 \cdot \tau}\right)$, deoarece $\omega \cdot \tau << 1$, rezultă că $|A|_{dB} \cong 0$; şi $\varphi \cong 0$. În consecință, dreptele $|A||_{dB} = 0$ şi $\varphi = 0$ sunt asimptote ale caracteristicilor de amplitudine, respectiv de fază;

- Pentru valori $\omega >> \frac{1}{\tau}$, adică $\left(\omega \geq \frac{10}{\tau}\right)$, deoarece $\omega \cdot \tau >> 1$, rezultă că $|A|_{dB} \cong \pm 20 \cdot m \cdot \lg(\omega \cdot \tau)$; şi $\varphi \cong \pm 90^{o} \cdot m$, adică se regăsesc caracteristicile de la zerouri/poli în origine, care sunt drepte de pantă $\pm 20 \cdot m \cdot \frac{dB}{dec}$ în cazul caracteristicii de amplitudine, respectiv dreptele $\varphi \cong \pm m \cdot 90^{o}$ în cazul caracteristicii de fază. În consecinţă, dreapta de pantă $\pm 20 \cdot m \cdot \frac{dB}{dec}$ care trece prin punctul de abscisă $\frac{1}{\tau}$ este asimptotă a caracteristicii de amplitudine, iar dreapta $\varphi \cong \pm m \cdot 90^{o}$ este asimptotă a caracteristicii de fază;
- Caracteristica asimptotică de amplitudine este formată din cele două asimptote ale acesteia frecvenţa $\omega = \frac{1}{\tau}$ fiind denumită punct de frângere (a caracteristicii de amplitudine); abaterea maximă între caracteristica reală şi cea asimptotică se obţine pentru $\omega = \frac{1}{\tau}$ şi are valoarea:

  $$\varepsilon_{dB} = \pm 20 \cdot \frac{m}{2} \cdot \lg\left(1 + \left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right)^{2}\right) \cong \pm 3 \cdot m\, dB,$$

  ceea ce corespunde unei amplificări $A = \sqrt{2}$ în cazul unui zero (semnul “+”), respectiv unei atenuări $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ în cazul unui pol (semnul “–”);
- Caracteristica de fază este formată din dreptele $\varphi = 0$ pentru $\omega \leq \frac{1}{10 \cdot \tau}$, $\varphi \cong \pm m \cdot 90^{o}$ pentru $\omega \geq \frac{10}{\tau}$, unite printr-o a treia, care (evident) are panta de $\pm m \cdot \frac{45^{o}}{dec}$; frecvenţele $\omega = \frac{1}{\tau}$ şi $\omega = \frac{10}{\tau}$ se numesc de asemenea puncte de frângere (a caracteristicii de fază). Eroarea maximă (în valoare absolută) se obţine în punctele $\omega = \frac{1}{\tau}$ şi $\omega = \frac{10}{\tau}$, având valoarea:

  $$|\varepsilon|^{o} = m \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right) \cong m \cdot 5{,}71^{o}$$

Se poate observa că aproximările asimptotice sunt întru totul acceptabile în cazul rădăcinilor (zerouri/poli) simple $(m = 1)$, şi susceptibile de îmbunătăţiri (de exemplu, liniarizări prin mai multe segmente de dreaptă) în cazul rădăcinilor multiple.

2.2.4 Factori cuadratici

Dacă FDT conţine expresii de tipul $\left(s^{2} + 2 \cdot \alpha \cdot s + \omega_{0}^{2}\right)^{\pm m}$ cu rădăcini complexe, atunci acestea se numesc factori cuadratici. La analiza în frecvenţă, cu substituţia $s \to j\omega$ rezultă:

$$\left((j \cdot \omega)^{2} + 2 \cdot \alpha \cdot j \cdot \omega + \omega_{0}^{2}\right)^{\pm m} = \left(-\omega^{2} + 2 \cdot \alpha \cdot j \cdot \omega + \omega_{0}^{2}\right)^{\pm m}$$

Dacă se consideră $\alpha = \delta \cdot \omega_{0}$, atunci este evident că pentru $\delta = 1$ se obţine un zero/pol dublu, iar pentru $\delta > 1$ două zerouri/poli simpli, cazuri discutate mai sus. Rezultă că singurul caz de studiat este $\delta < 1$, factorul cuadratic scriindu-se sub forma:

$$Q(j\omega)=\omega_0^{\pm 2\cdot m}\cdot\left(1+2\cdot\delta\cdot j\cdot\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{\pm m} \tag{2.22}$$

Aplicând (2.17) şi (2.18), rezultă că:

$$A(\omega)\big|_{dB}=\pm 40\cdot m\cdot \lg(\omega_0)\pm 10\cdot m\cdot \lg\left(\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\cdot\delta^2\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \tag{2.23}$$

$$\varphi(\omega)=\pm m\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{2\cdot\delta\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \tag{2.24}$$

În figura 2.5 sunt prezentate caracteristicile de amplitudine şi de fază pentru factori cuadratici (zerouri, respectiv poli cuadratici de ordinul m). La trasarea caracteristicilor de amplitudine s-a făcut abstracție de constanta $\pm 40\cdot m\cdot \lg(\omega_0)$.

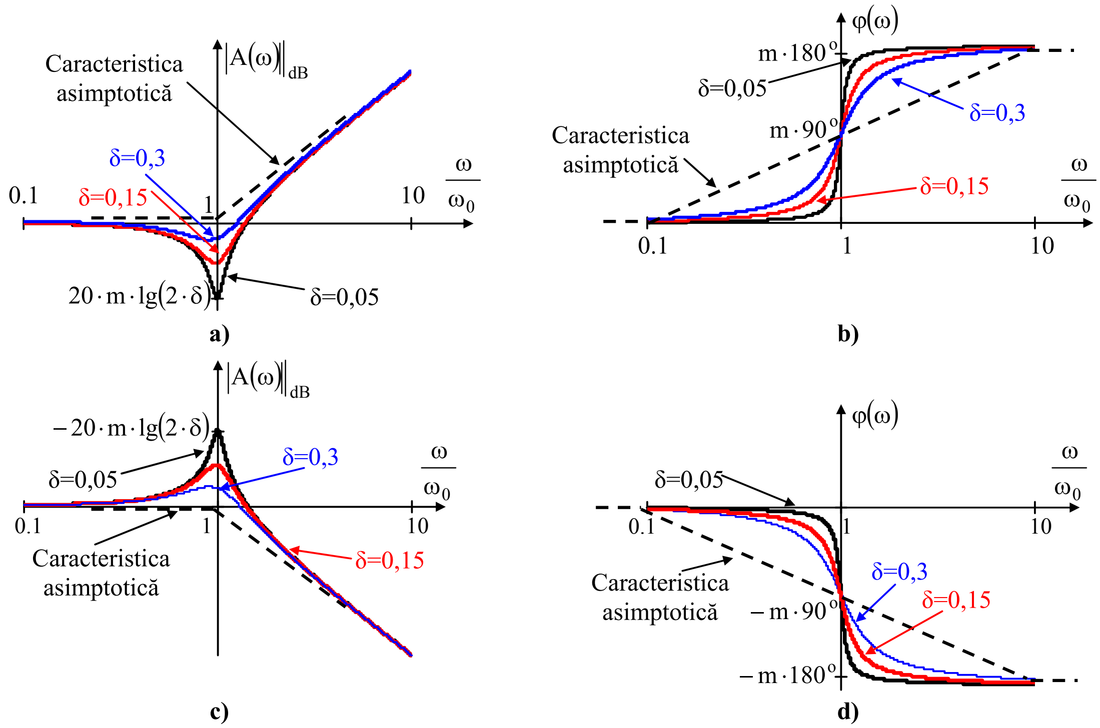


Fig. 2.5. Caracteristicile de frecvență ale zerourilor/polilor cuadratici:

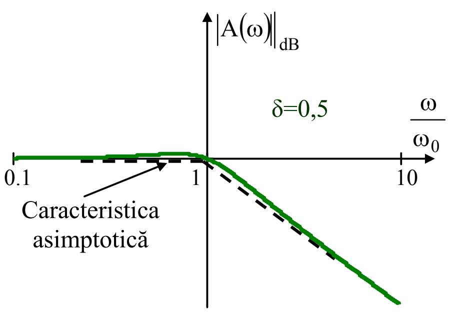
e) Caracteristica de amplitudine pentru zerouri multiple de ordinul m;
f) Caracteristica de fază pentru zerouri multiple de ordinul m;
g) Caracteristica de amplitudine pentru poli multipli de ordinul m;
h) Caracteristica de fază pentru poli multipli de ordinul m.

Observație:

Analizând expresia (2.24), se poate observa că faza prezintă o discontinuitate atunci când $\omega=\omega_0$. Într-adevăr, $\lim\limits_{\substack{\omega\to\omega_0\\ \omega<\omega_0}}\Phi(\omega):=\Phi(\omega_0-0)=\pm\frac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{\substack{\omega\to\omega_0\\ \omega>\omega_0}}\Phi(\omega):=\Phi(\omega_0+0)=\mp\frac{\pi}{2}$. Cum o astfel de situație este inacceptabilă practic (defazajul nu poate avea o astfel de variație în vecinătatea frecvenței ω_0), relația fazei se corectează astfel:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\pm m\cdot \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\cdot\delta\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{pentru } \dfrac{\omega}{\omega_0}\le 1\\ \pm m\cdot\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\cdot\delta\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)+\pi\right) & \text{pentru } \dfrac{\omega}{\omega_0}> 1\end{cases} \tag{2.25}$$

În figura 2.5 caracteristicile de fază s-au reprezentat în conformitate cu (2.25). De asemenea, s-au reprezentat şi caracteristicile asimptotice. Acestea sunt caracterizate de pantele $\pm 40\cdot m\dfrac{dB}{dec}$ în cazul caracteristicilor de amplitudine, respectiv $\pm m\cdot\dfrac{90^o}{dec}$ în cazul caracteristicilor de fază, după cum se poate constata cu uşurinţă din (2.23 şi (2.25). De asemenea, se poate constata că abaterile între caracteristicile reale şi cele asimptotice sunt mai mari, cu un extrem la frecvenţa $\omega=\omega_0$ în cazul caracteristicilor de amplitudine, după cum se poate obţine imediat prin derivarea expresiei (2.23). De asemenea, tot prin derivarea expresiei (2.23) se poate constata că valoarea absolută a acestei abateri este minimă pentru $\delta=\dfrac{1}{2}$, după cum se poate observa în figura 2.6 unde sunt prezentate caracteristicile de amplitudine şi de fază pentru un pol cuadratic de ordinul m, corespunzătoare acestui caz. Este evident că aceste caracteristici sunt cele mai apropiate de cele asimptotice, atât pentru polii/zerourile simple cât şi cuadratice.



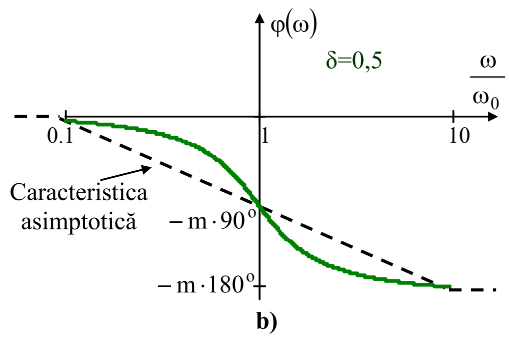


Fig. 2.6. Caracteristicile de frecvenţă ale polilor cuadratici pentru $\delta=\dfrac{1}{2}$:

i) Caracteristica de amplitudine pentru poli multipli de ordinul m;
j) Caracteristica de fază pentru poli multipli de ordinul m.

2.2.5 Exemplu de trasare a caracteristicilor de frecvenţă

Cele menţionate în paragrafele anterioare vor fi exemplificate prin reprezentarea caracteristicilor de transfer ale FDT:

$$G(j\cdot\omega)=10^4\cdot\frac{1+j\cdot\omega\cdot 10^{-2}}{(1+j\cdot\omega)\cdot(1+j\cdot\omega\cdot 10^{-4})}$$

Caracteristica logaritmică de amplitudine este:

$$|A(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \lg\left(10^4 \cdot \frac{\sqrt{1+(\omega \cdot 10^{-2})^2}}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{1+(\omega \cdot 10^{-4})^2}}\right) =$$

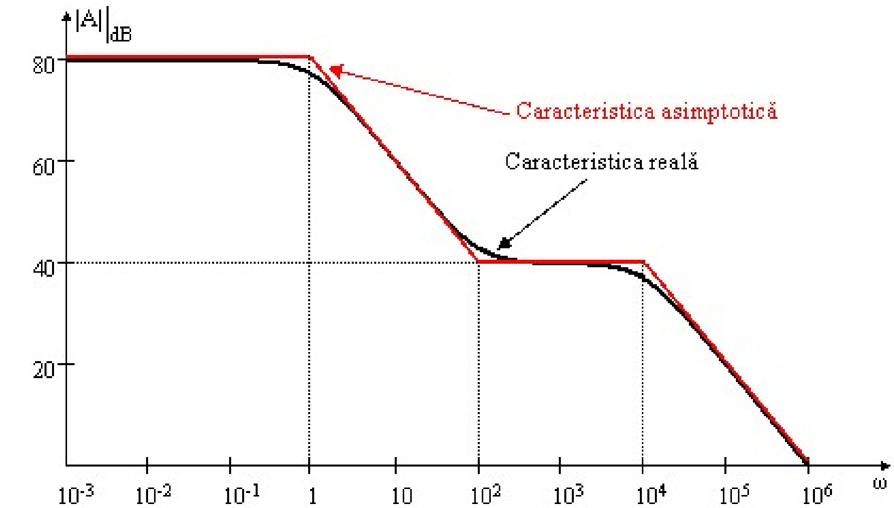
$$= 80 - 20 \cdot \lg\sqrt{1+\omega^2} + 20 \cdot \lg\sqrt{1+(\omega \cdot 10^{-2})^2} - 20 \cdot \lg\sqrt{1+(\omega \cdot 10^{-4})^2}$$

Se observă că FDT este caracterizată de zeroul simplu $z = 10^2$ şi polii simpli $p_1 = 1$ şi $p_2 = 10^4$.

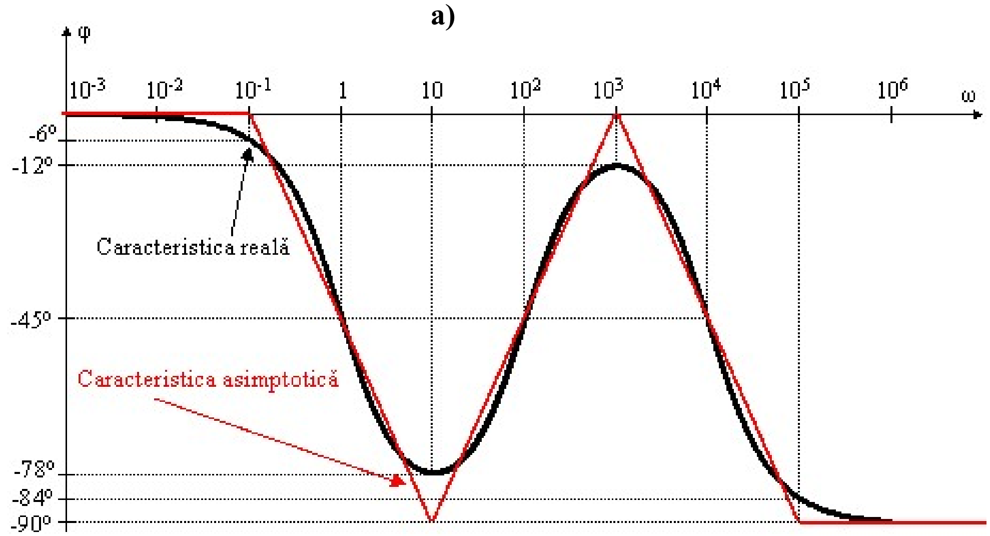
Caracteristica de fază (defazajul) este:

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega) + \mathrm{arctg}(\omega \cdot 10^{-2}) - \mathrm{arctg}(\omega \cdot 10^{-4})$$

Termenii ce apar în caracteristicile de amplitudine şi de fază au fost scrişi în ordinea crescătoare a pulsațiilor de frângere ce apar; cele două caracteristici de frecvență sunt reprezentate în figura 2.7.



a)



b)

Fig. 2.7. Caracteristici de frecvență:

a) Caracteristica de amplitudine;
b) Caracteristica de fază.

Pentru a desena caracteristicile cerute se pot reprezenta variațiile cu frecvența ale fiecărui termen în parte şi apoi să se facă o suma lor grafică, sau se poate trasa direct caracteristica de frecvență cerută, astfel:

Fiecare pulsație de frângere înseamnă intrarea în acțiune a unui termen. Rezultă că se pot trasa asimptotele caracteristicilor, modificând pantele acestora în stânga pulsației de frângere cu valoarea pantei din dreapta. De exemplu, **asimptotele caracteristicii de amplitudine** sunt:

- dreaptă orizontală pentru $\omega < 1$;
- La $\omega = 1$ intră în acțiune polul p_1, astfel că amplificarea scade cu o pantă de $-20\dfrac{dB}{dec}$. Rezultă că asimptota caracteristicii va fi o dreaptă cu panta $0+(-20) = -20\dfrac{dB}{dec}$;
- La $\omega = 10^2$ intră în acțiune zeroul z, astfel că amplificarea crește cu o pantă de $20\dfrac{dB}{dec}$. Rezultă că asimptota caracteristicii va fi o dreaptă cu panta $-20+20=0\dfrac{dB}{dec}$ (orizontală);
- La $\omega = 10^4$ intră în acțiune polul p_2, astfel că amplificarea scade cu o pantă de $-20\dfrac{dB}{dec}$. Rezultă că asimptota caracteristicii va fi o dreaptă cu panta $0+(-20) = -20\dfrac{dB}{dec}$.

Asimptotele caracteristicii de fază se trasează asemănător.
În figura 2.7 s-au reprezentat atât caracteristicile asimptotice, cât și cele reale. În cazul caracteristicii de amplitudine se poate observa că este cel puțin mulțumitoare caracteristica asimptotică, ceea ce nu este valabil și în cazul caracteristicii de fază. Explicația constă în faptul că frecvențele de frângere sunt foarte "dese" (între $\omega = 10^{-1}$ și $\omega = 10^5$ nu există paliere ale caracteristicii asimptotice). Rezultă că există cazuri în care intră în acțiune doi termeni ai caracteristicii de fază, ceea ce face să crească abaterile între caracteristica reală și cea asimptotică. De exemplu, în jurul valorii $\omega = 10$, defazajul introdus de polul p_1 se apropie de -90°, simultan însă cu intrarea în acțiune a zeroului z, ce începe creșterea defazajului către +90°. Acest fapt se traduce într-o abatere maximă (dublă față de situația influenței unui singur punct de frângere) de cca. 12°.
Rezultă că adoptarea sau nu a caracteristicilor asimptotice trebuie făcută cu atenție, observând în prealabil distribuția zerourilor și a polilor pe axa frecvențelor.

2.2.6 Metoda locului de transfer (caracteristica Nyquist)

Ca orice număr complex, $H(j\omega)$ se poate reprezenta printr-un vector în plan. Locul de transfer (sau caracteristica Nyquist) este locul geometric în planul complex al vârfului vectorului $H(j\omega)$, atunci când ω variază teoretic de la $-\infty$ la ∞, practic de la 0 la ∞.

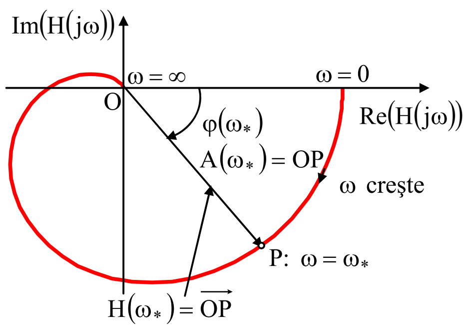


Fig. 2.8. Caracteristica Nyquist

În figura 2.8 este prezentat un exemplu de loc de transfer. Pentru un punct M de pe locul de transfer, căruia îi corespunde pulsația ω_*, amplificarea și defazajul se determină direct pe grafic:

$$A(j\omega_*) = |H(j\omega_*)| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = OP;$$

$$\varphi(\omega_*) = \arg(H(j\omega_*)).$$

Caracteristica Nyquist se poate folosi și pentru studiul stabilității sistemului. Există mai multe teoreme de stabilitate.

Un sistem cu polii în semiplanul stâng (cu partea reală negativă) este stabil dacă locul de transfer nu înconjoară originea.

3. SISTEME ÎN TIMP DISCRET

În continuare se vor studia sisteme numerice invariabile în timp (SNI), fără stare iniţială (iniţial în repaos).

3.1. SISTEME NUMERICE INVARIABILE ÎN TIMP

În practică (electronică, telecomunicaţii) sistemele ce funcţionează cu semnale numerice (figura 3.1) pot fi realizate prin circuite de comutaţie (comutatoare electronice comandate periodic) care eşantionează (discretizează) semnalele sau prin blocuri operaţionale care implementează funcţia de transfer (relaţia intrare-ieşire) între semnale numerice.

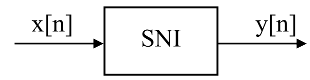


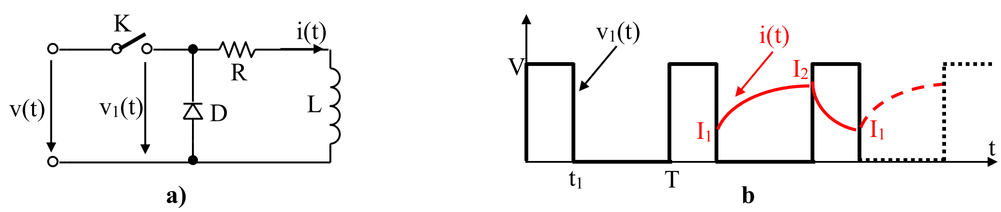
Fig. 3.1
SNI; Semnalele de intrare şi ieşire

În funcţie de natura funcţiei intrare-ieşire, pot exista mai multe tipuri de SNI:

- SNI fără memorie, la care relaţia intrare-ieşire este de tipul:
$$y[n] = A \cdot x[n], \text{ cu } A = \text{ct.} \tag{3.1}$$
- SNI cu memorie finită, la care relaţia intrare-ieşire este de tipul:
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} A_k \cdot x[n-k], \text{ cu } A_k = \text{ct.} \tag{3.2}$$
- SNI cu memorie infinită, la care relaţia intrare-ieşire este de tipul:
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot x[n-k], \text{ cu } A_k = \text{ct.} \tag{3.3}$$
- SNI cu memorie finită definite recursiv, la care relaţia intrare-ieşire este de tipul:
$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} B_k \cdot y[n-k] = x[n], \text{ cu } B_k = \text{ct.} \tag{3.4}$$

Primele trei tipuri sunt SNI nerecursive, întrucât ieşirea este dependentă numai de eşantioanele semnalului de intrare, spre deosebire de al patrulea, la care ieşirea depinde atât de intrare, cât şi de un număr de eşantioane precedente ale ieşirii.

Un exemplu tipic de sistem numeric este un sistem analogic alimentat periodic prin intermediul unui comutator (electronic), astfel încât durata t_1 a impulsului de comandă să fie foarte mică în comparaţie cu perioada acestuia, T.



τ

Fig. 3.2

a) Un exemplu de SNI
b) Excitaţia $v_1(t)$ şi răspunsul i(t) în regim permanent

Răspunsul i(t) al sistemului la excitaţia $v_1(t)$ se poate determina prin metodele prezentate la studiul sistemelor analogice (rezolvarea ecuaţiei diferenţiale ce se obţine prin analiza circuitului).

Presupunând că sistemul (circuitul RL) din figura 3.2a are la intrare semnalul $v(t) = V \cdot u(t)$, semnalul $v_1(t)$ are forma din figura 3.2b. În funcţionarea sistemului într-o perioadă a semnalului $v_1(t)$ există două intervale de timp, corespunzător cărora se scriu ecuaţiile:

- $$0 < t < t_1 \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = V \tag{3.5}$$

- $t_1 < t < T \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$ (3.6)

Soluţia ecuaţiilor (3.5) şi (3.6) este de forma:

$$i(t) = \begin{cases} K_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V}{R} & \text{pentru } 0 < t < t_1 \\ K_2 \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} & \text{pentru } t_1 < t < T \end{cases} \tag{3.7}$$

unde $\tau = \frac{L}{R}$ (3.8)

este constanta de timp a circuitului RL, iar K_1 şi K_2 sunt constante de integrare, care se determină din condiţiile iniţiale. În acest sens, se face precizarea că iniţial sistemul este în repaos, deci $I_{1_i} = 0$, iar la trecerea de la o perioadă la următoarea valorile I_1 şi I_2 (figura 3.2b) se modifică până când circuitul funcţionează în regim permanent şi în consecinţă aceste valori se stabilizează. Ţinând cont de acestea, ca şi de continuitatea curentului în momentul t_1, valorile I_1 şi I_2 specifice regimului permanent se determină astfel:

$$\left.\begin{array}{r} i(0) = I_1 \Rightarrow K_1 = I_1 - \frac{V}{R} \\ i(t_1 - 0) = I_2 \Rightarrow I_2 = I_1 e^{-\frac{t_1}{\tau}} + \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \\ i(t_1 + 0) = I_2 \Rightarrow K_2 = I_2 \\ i(T) = I_1 \Rightarrow I_2 e^{-\frac{T-t_1}{\tau}} = I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = I_1 e^{-\frac{t_1}{\tau}} + \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \\ I_2 e^{-\frac{T-t_1}{\tau}} = I_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Se observă că s-a obţinut sistemul de ecuaţii (3.9) cu necunoscutele I_1 şi I_2, cu soluţia:

$$\begin{cases} I_2 = \frac{V}{R} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \\ I_1 = \frac{V}{R} \cdot \frac{e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} \end{cases} \tag{3.10}$$

Înlocuind (3.10) în expresiile constantelor K_1 şi K_2 din (3.9) şi apoi în expresia răspunsului (3.7), rezultă:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V}{R} \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{\frac{t_1 - T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{pentru } 0 < t < t_1 \\ \frac{V}{R} \cdot \frac{e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pentru } t_1 < t < T \end{cases} \tag{3.11}$$

Trebuie remarcat faptul că pot exista situaţii în care răspunsul SNI reprezintă limita pentru $t_1 \to 0$ a răspunsului sistemului la excitaţia $v_1(t)$. Mai precis, acest lucru este posibil în cazurile în care limita menţionată este nedeterminată. Altfel, (după) cum se poate observa cu uşurinţă şi din exemplul analizat, ţinând cont de (3.10) şi (3.11), rezultă că $\lim_{t_1 \to 0} I_1 = 0$,

$\lim_{t_1 \to 0} I_2 = 0$ şi $\lim_{t_1 \to 0} i(t) = \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$, pentru că $(t_1 \to 0) \Rightarrow (t \to 0)$.

3.2. ANALIZA SNI ÎN (DOMENIUL) TIMP

Un sistem analogic, cu excitaţia x(t) şi răspunsul y(t), este caracterizat de o ecuaţie diferenţială (de ordinul n, acelaşi cu ordinul sistemului). Dacă se eşantionează excitaţia, adică $x(t) \to x[k]$ şi în consecinţă $y(t) \to y[k]$, ţinând cont că derivarea semnalului analogic devine avans în timp al semnalului eşantionat (sau comutarea variabilei k), ecuaţia diferenţială se transformă într-o ecuaţie cu diferenţe finite, de forma:

$$\begin{aligned} & a_n \cdot y[k+n] + a_{n-1} \cdot y[k+n-1] + ... + a_1 \cdot y[k+1] + a_0 \cdot y[k] = \\ & = b_m \cdot x[k+m] + b_{m-1} \cdot x[k+m-1] + ... + b_1 \cdot x[k+1] + b_0 \cdot x[k] \end{aligned} \quad (3.12)$$

cu coeficienţii a_p şi b_s constanţi, $\forall p = \overline{0,n}$ şi $s = \overline{0,m}$, $a_n \neq 0$; $b_m \neq 0$ iar $m \leq n$, pentru că răspunsul nu precede excitaţia.

Se defineşte **operatorul de comutaţie**, E, pentru o funcţie (de variabilă) discretă, f[k]:

$$E(f[k]) := f[k+1] \quad (3.13)$$

Rezultă că se obţine succesiv:

$$E^2(f[k]) = E(E(f[k])) = E(f[k+1]) = f[k+2]$$

$$E^3(f[k]) = E(E^2(f[k])) = E(f[k+2]) = f[k+3]$$

Prin inducţie matematică se demonstrează cu uşurinţă că:

$$E^n(f[k]) = f[k+n] \quad (3.14)$$

Operatorul E poate fi pus în legătură cu **operatorul de diferenţă**, Δ:

$$\Delta(f[k]) := f[k+1] - f[k] = E(f[k]) - f[k] = (E - \mathbf{1})(f[k]) \quad (3.15)$$

Rezultă că $:\Delta = E - \mathbf{1}$, relaţie ce trebuie înţeleasă în sens funcţional, adică $\mathbf{1}$ reprezintă funcţia (operatorul) identic: $\mathbf{1}(f[k]) = f[k]$.

Repetând procedeul folosit la operatorul E, se obţine succesiv:

$$\begin{aligned} \Delta^2(f[k]) &= \Delta(\Delta(f[k])) = \Delta(f[k+1] - f[k]) = \Delta(f[k+1]) - \Delta(f[k]) = \\ &= f[k+2] - f[k+1] - (f[k+1] - f[k]) = f[k+2] - 2 \cdot f[k+1] + f[k] = \\ &= (E - \mathbf{1})^2 (f[k]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3(f[k]) &= \Delta(\Delta^2(f[k])) = \Delta(f[k+2] - 2 \cdot f[k+1] + f[k]) = \\ &= f[k+3] - 3 \cdot f[k+2] + 3 \cdot f[k+1] - f[k] = (E - \mathbf{1})^3 (f[k]) \end{aligned}$$

Prin inducţie matematică rezultă legătura generală între E şi Δ:

$$\Delta^n = (E - \mathbf{1})^n \quad (3.16)$$

Unde prin "puterea" n a operatorului se înţelege compunerea sa cu el însuşi de n ori, iar expresia $(E - \mathbf{1})^n$ poate fi pusă în legătură cu binomul lui Newton corespunzător.

Ţinând cont de (3.14), ecuaţia (3.12) se scrie sub forma următoare:

$$\begin{aligned} & \left(a_n \cdot E^n + a_{n-1} \cdot E^{n-1} + ... + a_1 \cdot E + a_0\right) y[k] = \\ & = \left(b_m \cdot E^m + b_{m-1} \cdot E^{m-1} + ... + b_1 \cdot E + b_0\right) x[k] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cu notaţiile:

$$\begin{aligned} A(E) &:= a_n \cdot E^n + a_{n-1} \cdot E^{n-1} + ... + a_1 \cdot E + a_0 \\ B(E) &:= b_m \cdot E^m + b_{m-1} \cdot E^{m-1} + ... + b_1 \cdot E + b_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A(E) şi B(E) fiind denumite polinoame operaţionale, (3.17) devine:

$$A(E) y[k] = B(E) x[k] \quad (3.19)$$

Se poate obţine o ecuaţie asemănătoare în Δ. Nu se vor modifica decât coeficienţii.

Observaţie:

Ecuaţia (3.17) poate fi interpretată şi ca o relaţie de recurenţă, întrucât, ţinând cont şi de (3.18) şi (3.19), se poate scrie sub forma echivalentă:

$$y[k+n] = -\frac{1}{a_n}\cdot\left[\left(a_n\cdot E^n + a_{n-1}\cdot E^{n-1} + ... + a_1\cdot E + a_0\right)y[k] + B(E)x[k]\right] \qquad (3.20)$$

Cu alte cuvinte, dacă sunt cunoscute toate valorile $y[k],\ \forall k=\overline{0,n-1}$, atunci se pot determina succesiv valorile $y[k],\ \forall k \geq n$. Acest procedeu însă nu permite determinarea soluţiei explicite.

Revenind la ecuaţia (3.19), aceasta se poate rezolva prin metode asemănătoare cu cele folosite la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. Astfel, soluţia generală este de forma:

$$y[k] = y_t[k] + y_p[k] \qquad (3.21)$$

unde:

- $y_t[k]$ se numeşte răspunsul tranzitoriu (sau liber) şi este soluţia ecuaţiei omogene: $$A(E)y[k] = 0 \qquad (3.22)$$
- $y_p[k]$ se numeşte răspunsul de regim permanent (sau forţat) şi este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (3.19).

Soluţiile ecuaţiei omogene sunt exponenţiale de tipul $y_t[k] = e^{r\cdot k}$.

Cu notaţia $\beta = e^r$ (3.23)

rezultă că:

$$E^n\left(e^{r\cdot k}\right) = e^{r\cdot(k+n)} = \beta^{k+n} \qquad (3.24)$$

astfel că ecuaţia omogenă (3.22) devine:

$$a_n\cdot\beta^n + ... + a_1\cdot\beta + a_0 = 0 \qquad (3.25)$$

cu soluţii reale sau complexe, simple sau multiple.

Dacă toate rădăcinile sunt simple, atunci:

$$y_t[k] = C_1\cdot\beta_1^k + C_2\cdot\beta_2^k + ... + C_n\cdot\beta_n^k \qquad (3.26)$$

Dacă există rădăcini multiple, atunci fiecare dintre ele contribuie la expresia soluţiei cu un număr de termeni egal cu ordinul multiplicităţii. De exemplu, dacă β_1 este o soluţie multiplă de ordinul p, atunci contribuţia ei în soluţie va fi:

$$C_{1,0}\cdot\beta_1^k + C_{1,1}\cdot k\cdot\beta_1^k + ... + C_{1,p-1}\cdot k^{p-1}\cdot\beta_1^k \qquad (3.27)$$

Se poate constata cu uşurinţă paralelismul perfect între rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a celor cu diferenţe finite.

Ca exemplificare, se vor determina constantele de integrare K_1 şi K_2 din (3.7), ce descrie răspunsul sistemului din figura 3.2a. Astfel, pe durata unei perioade oarecare, k şi ţinând cont de (3.7), expresia curentului se poate scrie sub forma:

$$i(t,k) = \begin{cases} K_1(k)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{V}{R} & \text{pentru } 0 < t < t_1 \\ K_2(k)\cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} & \text{pentru } t_1 < t < T \end{cases}$$

Constantele K_1 şi K_2 îşi modifică valoarea de la o perioadă la următoarea (de exemplu $K_1(0) = -\frac{V}{R}$, pentru că $i(0,0)=0$), până la stabilizarea acestora în regimul permanent.

Cum în condiţiile de continuitate intervin valorile curentului în momente de timp bine determinate, rezultă că determinarea constantelor K_1 şi K_2 poate fi gândită ca răspunsul unui sistem eşantionat.

Astfel:

$$\begin{cases} i(t_1-0,k) = i(t_1+0,k) \Rightarrow K_1[k]\cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} + \dfrac{V}{R} = K_2[k] \\ i(T-0,k) = i(0,k+1) \Rightarrow K_2[k]\cdot e^{-\frac{T-t_1}{\tau}} = K_1[k+1] + \dfrac{V}{R} \end{cases}$$

Înlocuind expresia K2[k] din prima relaţie în a doua, se obţine ecuaţia cu diferenţe:

$$\left(K_1[k]\cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}}+\frac{V}{R}\right)\cdot e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}=K_1[k+1]+\frac{V}{R}$$

care se scrie sub forma:

$$K_1[k+1]-K_1[k]\cdot e^{-\frac{T}{\tau}}=-\frac{V}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}\right)\Leftrightarrow\left(E-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)K_1[k]=-\frac{V}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}\right)$$

Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este:

$$\beta-e^{-\frac{T}{\tau}}=0$$

Rezultă că soluţia tranzitorie este:

$$K_{1_t}[k]=A\cdot e^{-\frac{T}{\tau}\cdot k}$$

Componenta forţată este de tipul membrului liber: $K_{1_p}[k]=a$.

Înlocuind în ecuaţie, rezultă:

$$a\cdot\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)=-\frac{V}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}\right)\Leftrightarrow a=-\frac{V}{R}\cdot\frac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

În final, expresia soluţiei generale este:

$$K_1[k]=A\cdot e^{-\frac{T}{\tau}\cdot k}-\frac{V}{R}\cdot\frac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Cum $K_1[0]=-\frac{V}{R}$, rezultă că:

$$-\frac{V}{R}=A-\frac{V}{R}\cdot\frac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\Leftrightarrow A=\frac{V}{R}\cdot e^{-\frac{T}{\tau}}\cdot\frac{1-e^{\frac{t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Înlocuind expresia constantei A în soluţia generală şi efectuând calculele se obţine:

$$\begin{cases}K_1[k]=\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{\frac{t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\cdot e^{-\frac{T}{\tau}\cdot(k+1)}-\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\\[2ex] K_2[k]=\left(\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{\frac{t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\cdot e^{-\frac{T}{\tau}\cdot(k+1)}-\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\right)\cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}}+\dfrac{V}{R}\end{cases}$$

Răspunsul în regim permanent se obţine efectuând limitele expresiilor K1[k] şi K2[k] pentru $k\to\infty$. Cum limita funcţiei e^{-x} pentru $x\to\infty$ este nulă, rezultă că valorile celor două constante în regim permanent vor fi:

$$\begin{cases}K_1=-\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\\[2ex] K_2=\dfrac{V}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\end{cases}$$

Comparând expresiile obţinute pentru constantele K_1 şi K_2 cu (3.10) şi (3.9) – legătura între K_1 şi K_2 şi valorile I_1 şi I_2 între care evoluează curentul i(t) – se observă că ele sunt identice, deci ambele metode folosite sunt corecte.

3.2.1. Funcţia de sistem

Dacă excitaţia x(t) şi răspunsul y(t) sunt semnale cauzale (ceea ce este adevărat în cazul sistemelor tehnice), atunci ele posedă transformatele *Z*: X(z), respectiv Y(z).

Cum $E^n(f[k]) = f[k+n]$, şi în conformitate cu teorema derivării pentru cazul sistemelor cu stare iniţială nulă, $Z(f[k+n]) = z^n \cdot F(z)$, rezultă că aplicând transformata Z ecuaţiei (3.19), ţinând cont şi de (3.18) şi (3.17), rezultă:

$$\left(a_n \cdot z^n + \ldots a_1 \cdot z + a_0\right) \cdot Y(z) = \left(b_m \cdot z^m + \ldots b_1 \cdot z + b_0\right) \cdot X(z) \tag{3.28}$$

Cu notaţiile:

$$\begin{cases} A(z) = a_n \cdot z^n + \ldots a_1 \cdot z + a_0 \\ B(z) := b_m \cdot z^m + \ldots b_1 \cdot z + b_0 \end{cases} \tag{3.29}$$

în care se poate observa că $A(z), B(z) \in \mathbf{R}(z)$ (sunt polinoame algebrice cu coeficienţi reali), rezultă că relaţia operaţională (3.19) s-a transformat în relaţia algebrică (3.28), similar cu transformarea ecuaţiilor diferenţiale în ecuaţii algebrice prin aplicarea transformatei Laplace.

Ecuaţia (3.28) se poate pune sub forma echivalentă:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m \cdot z^m + \ldots b_1 \cdot z + b_0}{a_n \cdot z^n + \ldots a_1 \cdot z + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)} := H(z) \tag{3.30}$$

în care H(z) se numeşte *funcţie de sistem* sau *funcţie de transfer*. Încă o dată se poate observa analogia perfectă cu definirea funcţiei de transfer a sistemelor analogice, transformata Laplace înlocuindu-se cu transformata *Z*.

Pentru SNI cu parametri concentraţi, H(z) este o fracţie raţională. Rădăcinile numitorului (soluţiile ecuaţiei $A(z) = 0$, care este de fapt ecuaţia caracteristică a ecuaţiei operaţionale omogene asociată ecuaţiei (3.19)) se numesc poli ai funcţiei de sistem şi determină răspunsul tranzitoriu (liber) al acestuia. Polii funcţiei de transfer corespund unor semnale exponenţiale, deci $e^{j\omega n}$ sau z^n este un semnal propriu al SNI.

Se numeşte *funcţie pondere*, h[k], răspunsul SNI la impulsul unitate, adică impulsul Dirac “eşantionat”:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k = 0 \\ 0 & \text{pentru } k \neq 0 \end{cases}$$

<u>Observaţie</u>:

Se ştie că $Z(\delta[k]) = 1$ (ca şi transformatele Laplace şi Fourier ale impulsului Dirac). Rezultă că dacă $x[k] = \delta[k]$, (3.30) devine:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Z(\delta[k])} = Y(z)$$

adică funcţia de sistem este răspunsul la semnalul unitate, de unde şi notaţia h[n] adoptată mai sus pentru aceasta.

Cum definiţia (3.30) se poate pune sub forma echivalentă $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$, şi ţinând cont că $Z^{-1}(X(z) \cdot H(z)) = x[k] \otimes h[k]$, în cazul semnalelor cauzale rezultă relaţia:

$$y[k] = x[k] \otimes h[k] = \sum_{i=0}^{k} x[k-i] \cdot h[i] \tag{3.31}$$

adică răspunsul SNI la o excitaţie oarecare, x[k] se poate obţine prin convoluţia acesteia cu funcţia pondere, h[n].

Se numeşte *răspuns indicial*, r[k], semnalul de la ieşirea unui SNI dacă excitaţia este treapta unitate eşantionată:

$$u[k]=\begin{cases}1 & \text{pentru } k>0\\ 0 & \text{pentru } k\le 0\end{cases}$$

Conform (3.31), rezultă că:

$$r[k]=u[k]\otimes h[k]=\sum_{i=0}^{k}u[k-i]\cdot h[i]=\sum_{i=0}^{k}h[i] \tag{3.32}$$

care se poate pune (şi) sub forma echivalentă:

$$h[k]=r[k]-r[k-1] \tag{3.33}$$

<u>Exemple</u>:

1. Să se găsească funcţia pondere a unui SNI pentru care relaţia intrare – ieşire cu diferenţe finite este:

a. $y[k]=a\cdot x[k]+b\cdot x[k-1]$, cu $a,b\in\mathbf{R}$; $\quad a,b=\text{ct.}$

b. $y[k]=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot x[k-i]$

c. $y[k]-\frac{1}{2}\cdot y[k-1]=x[k]$

Să se determine şi răspunsurile SNI la excitaţia $x[k]=2^k$

Rezolvare

Funcţia pondere este răspunsul SNI la impulsul unitate, deci se va considera $x[k]=\delta[k]$.

a. $x[k]=\delta[k]\Rightarrow h[k]=a\cdot\delta[k]+b\cdot\delta[k-1]$

În cazul $x[k]=2^k$, răspunsul se determină prin convoluţie numerică, relaţia (3.31):

$$y[k]=\sum_{i=0}^{k}x[k-i]\cdot h[i]=\sum_{i=0}^{k}2^{k-i}\cdot\left(a\cdot\delta[i]+b\cdot\delta[i-1]\right)=$$

$$=2^k\cdot\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\left(a\cdot\delta[i]+b\cdot\delta[i-1]\right)=2^k\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

Se poate verifica şi direct:

$$\left.\begin{array}{r}y[k]=a\cdot x[k]+b\cdot x[k-1]\\ x[k]=2^k\end{array}\right\}\Rightarrow y[k]=a\cdot 2^k+b\cdot 2^{k-1}=2^k\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

b. Conform definiţiei, y[k] caracterizează un sistem nerecursiv. Datorită invarianţei în timp şi liniarităţii, se obţine:

$$\left.\begin{array}{l}h[k]=\delta[k]+\frac{1}{2}\cdot\delta[k-1]+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\delta[k-i]+\ldots\\ \text{Dar } \delta[k-i]=1\Leftrightarrow k=i;\ \text{Altfel,}\ \delta[k-i]=0\end{array}\right\}\Rightarrow h[k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot u[k]$$

Dacă $x[k]=2^k$, atunci, prin convoluţie numerică, rezultă răspunsul:

$$y[k]=\sum_{i=0}^{k}x[k-i]\cdot h[i]=\sum_{i=0}^{k}2^{k-i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=2^k\cdot\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}=2^k\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k}}{1-\frac{1}{4}}\cong\frac{2^{k+2}}{3}$$

c. Este evident că y[k] defineşte un sistem recursiv. Conform definiţiei, funcţiei pondere, se obţine:

$$h[k]-\frac{1}{2}\cdot h[k-1]=\delta[k]$$

Sistemul fiind cauzal $\Rightarrow h[k]=0$ pentru $k<0$, astfel că rezultă succesiv:

$$\left.\begin{aligned} k=0 \Rightarrow h[0]=\delta[0]=1 \\ k=1 \Rightarrow h[1]-\frac{1}{2}\cdot h[0]=\delta[1]=0 \Leftrightarrow h[1]=\frac{1}{2} \\ k=2 \Rightarrow h[2]-\frac{1}{2}\cdot h[1]=\delta[2]=0 \Leftrightarrow h[2]=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow h[k]=\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot u[k]$$

<u>Observaţie</u>:
SNI de la punctele **b.** şi **c.** sunt definite de aceeaşi funcţie pondere, realizată în două variante: sistem nerecursiv cu memorie infinită (cazul **b.**), respectiv sistem recursiv cu memorie finită (formată dintr-un singur element de memorie – cazul **c.**)

2. La intrarea unui SNI se aplică excitaţia $x[k]=z^k$. Să se determine răspunsul sistemului.

Aplicând convoluţia numerică (3.31), se obţine:

$$y[k]=x[k]\otimes h[k]=\sum_{i=0}^{k} x[k-i]\cdot h[i]=\sum_{i=0}^{k} z^{k-i}\cdot h[i]=z^k\cdot\sum_{i=0}^{k} h[i]\cdot z^{-i}=z^k\cdot H(z)$$

Relaţia se poate scrie şi sub forma:

$$H(z)=\frac{y[k]}{z^k},$$

ce poate fi considerată o nouă interpretare a funcţiei de sistem.

3.2.2. Proprietăţi ale funcţiei de sistem

Relaţia intrare – ieşire se poate exprima într-un mod echivalent, ordonând termenii după întârziere şi nu după avans, aşa cum s-a procedat în (3.12):

$$y[k]+a_1\cdot y[k-1]+\ldots+a_N\cdot y[k-N]=b_0\cdot x[k]+b_1\cdot x[k-1]+\ldots+b_M\cdot x[k-M] \quad (3.34)$$

cu $M\le N$ în cazul sistemelor cauzale. Aplicând transformata *Z*, rezultă:

$$Y(z)\cdot\left(1+a_1\cdot z^{-1}+\ldots+a_N\cdot z^{-N}\right)=X(z)\cdot\left(b_0+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_M\cdot z^{-M}\right)$$

Rezultă că funcţia de transfer capătă forma:

$$H(z):=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_M\cdot z^{-M}}{1+a_1\cdot z^{-1}+\ldots+a_N\cdot z^{-N}}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i\cdot z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i\cdot z^{-i}};\ M\le N \quad (3.35)$$

Relaţia (3.34) se poate scrie echivalent sub formă recursivă:

$$y[k]=\sum_{i=0}^{M} b_i\cdot x[k-i]-\sum_{i=1}^{N} a_i\cdot y[k-i] \quad (3.36)$$

În consecinţă, răspunsul unui SNI recursiv la impulsul $(\delta[k])$ este de durată infinită.

Dacă $a_i=0$, $\forall i=\overline{1,N}$, atunci (3.36) nu mai este o relaţie de recurenţă:

$$y[k]=\sum_{i=0}^{M} b_i\cdot x[k-i] \quad (3.37)$$

$$Y(z)=X(z)\cdot\sum_{i=0}^{M} b_i\cdot z^{-i} \Leftrightarrow H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i\cdot z^{-i}$$

În consecinţă, răspunsul unui SNI nerecursiv la impulsul $(\delta[k])$ este de durată finită.

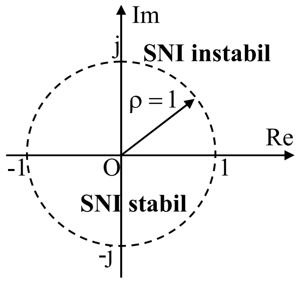


Fig. 3.3
Stabilitatea SNI

Funcţia de transfer, la fel ca şi la sistemele analogice, oferă informaţii despre *stabilitatea* SNI. Astfel, ţinând cont că H(z) se prezintă sub forma unei fracţii raţionale în z, polii acesteia (rădăcinile numitorului acesteia sau ecuaţiei caracteristice) sunt în general complecşi: $z_p = \rho_p \cdot e^{j \cdot \theta_p}$. Cum stabilitatea oricărui sistem presupune absenţa oscilaţiilor crescătoare în timp, rezultă că un SNI stabil trebuie să aibă polii în interiorul cercului $\rho = 1$, situat în planul complex (figura 3.3). Polii situaţi pe circumferinţa cercului trebuie să fie simpli, pentru că altfel SNI este instabil.

De exemplu, dacă $z_p = e^{\pm j \cdot \theta_p}$ este o pereche de poli dubli cu modulul unitar $(\rho_p = 1)$, răspunsul corespunzător acestora este de forma:

$$C_{01} \cdot \cos(k \cdot \theta_p + \varphi_1) + k \cdot C_{02} \cdot \cos(k \cdot \theta_p + \varphi_2)$$

deci este crescător odată cu k, adică sistemul este instabil.

De asemenea, polii funcţiei de sistem determină, prin natura lor (reali sau complecşi conjugaţi) răspunsul tranzitoriu (liber) al sistemului, după cum s-a arătat deja.

În concluzie, funcţiile de transfer, H(s) – pentru SAI, respectiv H(z) pentru SNI, conţin toate informaţiile necesare pentru determinarea răspunsului la orice excitaţie.

3.3. APLICAŢII

3.3.1. Să se determine H(z) şi Y(z) pentru sistemul eşantionat din figura 3.4, în următoarele ipoteze:

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t);$$

$$h_1(t) = h_2(t) = t \cdot e^{-t}:$$

Perioada de eşantionare a celor două comutatoare, presupuse sincrone este $T = 1$.

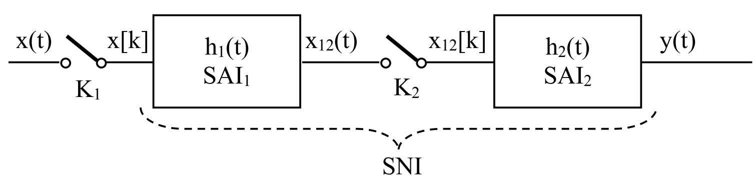


Fig. 3.4

Rezolvare

Cele două sisteme fiind conectate în cascadă, rezultă că $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

$$h_1(t) = h_2(t) = t \cdot e^{-t} \Rightarrow H_1(z) = H_2(z) = Z(t \cdot e^{-t}) = -T \cdot z \cdot \frac{d(Z(e^{-t}))}{dz} =$$

$$= -T \cdot z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z - e^{-T}}\right) = -T \cdot z \cdot \frac{z - e^{-T} - z}{(z - e^{-T})^2} = \frac{z \cdot T \cdot e^T}{(z \cdot e^T - 1)^2}$$

$$T = 1 \Rightarrow H_1(z) = H_2(z) = \frac{z \cdot e}{(z \cdot e - 1)^2} \Rightarrow H(z) = \frac{z^2 \cdot e^2}{(z \cdot e - 1)^4}$$

Se observă că $z_1 = e^{-1}$ este pol cuadruplu, şi cum $e^{-1} < 1$, rezultă că sistemul este stabil.

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t) \Rightarrow X(z) = \frac{z \cdot e}{z \cdot e - 1} \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{z^3 \cdot e^3}{(z \cdot e - 1)^5}$$

3.3.2. Să se determine H(z) şi Y(z) pentru sistemul eşantionat din figura 3.5, în ipotezele specificate pentru sistemul din figura 3.4.

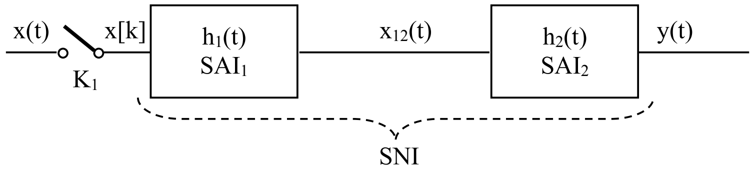


Fig. 3.5

Rezolvare

În acest caz sunt cascadate sistemele analogice şi nu cele eşantionate. Rezultă că:

$$H(s) = H_1(s)\cdot H_2(s) \Rightarrow h(t) = h_1(t)\otimes h_2(t)$$

$$h(t) = \int_0^t h_1(\tau)\cdot h_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau\cdot e^{-\tau}\cdot(t-\tau)\cdot e^{-t+\tau}d\tau = e^{-t}\cdot\int_0^t \tau\cdot(t-\tau)d\tau =$$

$$= e^{-t}\cdot\left(t\cdot\left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t - \left.\frac{\tau^3}{3}\right|_0^t\right) = \frac{e^{-t}\cdot t^3}{6}$$

Ţinând cont că:

$$Z\left(\frac{t^k}{k!}\cdot e^{-a\cdot t}\right) = \frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{z}{z-e^{-a\cdot T}}\right),$$

rezultă că:

$$H(z) = Z\left(\frac{e^{-t}\cdot t^3}{6}\right) = \frac{z\cdot e\cdot\left(z^2\cdot e^2 + 4\cdot z\cdot e + 1\right)}{6\cdot(z\cdot e-1)^4}$$

Se observă că sistemul este stabil, dar trebuie remarcat şi faptul că funcţia de transfer a sistemului analizat este mult diferită de cea a sistemului din figura 3.4, deşi la prima vedere sistemele par identice. De aici rezultă importanţa locului din sistem în care se face eşantionarea acestuia.

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{(z\cdot e)^2\cdot\left(z^2\cdot e^2 + 4\cdot z\cdot e + 1\right)}{6\cdot(z\cdot e-1)^6}$$

3.3.3. Unui SNI caracterizat de funcţia pondere $h[k] = 0{,}9^k u[k]$ i se aplică semnalul de intrare $x[k] = u[k] - u[k-10]$. Să se determine răspunsul sistemului y[k].

Rezolvare

$$h[k] - 0{,}9\cdot h[k-1] = \delta[k] \Rightarrow y[k] - 0{,}9\cdot y[k-1] = x[k]$$

Aplicând transformata Z, se obţine:

$$Y(z)\cdot\left(1-0{,}9\cdot z^{-1}\right) = X(z)$$

Rezultă:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-0{,}9\cdot z^{-1}} = \frac{z}{z-0{,}9}$$

Verificare: Cum $Z\left(e^{a\cdot t}\right) = \frac{z}{z-e^{a\cdot T}}$, considerând că unitatea de timp este perioada de eşantionare, $(T=1)$, inversiunea este evidentă: $h[k] = u[k]\cdot e^{k\cdot\ln(0,9)} = 0{,}9^k\cdot u[k]$, deci H(z) a fost calculat corect. Cu alte cuvinte, H(z) se putea determina şi direct, aplicând transformata *Z* funcţiei pondere h[k].

Cum $Y(z) = H(z)\cdot X(z)$, rezultă că pentru determinarea răspunsului trebuie determinată transformata *Z* a excitaţiei, X(z).

Ţinând cont de transformata *Z* a impulsului treaptă unitate:

$$Z(u[k]) = \frac{z}{z-1},$$

şi de teorema întârzierii în timp, se obţine:

$$X(z) = Z(u[k]) - Z(u[k-10]) = \frac{z}{z-1} - z^{-10} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} \cdot \left(1 - z^{-10}\right),$$

Care se aduce la forma:

$$X(z) = \frac{z \cdot \left(z^{10} - 1\right)}{z^{10}(z-1)} = \frac{z^9 + z^8 + \ldots + z + 1}{z^9}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z}{z-0{,}9} \cdot \frac{z^9 + z^8 + \ldots + z + 1}{z^9} = \frac{z}{z-0{,}9} \cdot \left(1 + z^{-1} + \ldots + z^{-9}\right)$$

Rezultă că:

$$y[k] = h[k] + h[k-1] + \ldots + h[k-9] = \sum_{i=0}^{k} h[k-i]; 0 \le k \le 9$$

De exemplu:

$$y[0] = h[0] = 0{,}9^0 = 1$$

$$y[5] = h[5] + h[5-1] + \ldots + h[5-5] = 0{,}9^5 + 0{,}9^4 + \ldots + 0{,}9 + 1 = 10 \cdot \left(1 - 0{,}9^6\right)$$

$$y[9] = h[9] + h[9-1] + \ldots + h[9-9] = 0{,}9^9 + 0{,}9^8 + \ldots + 0{,}9 + 1 = 10 \cdot \left(1 - 0{,}9^{10}\right)$$

Cum $x[k] = 0$ pentru $k \ge 10$, rezultă că în acest caz răspunsul y[k] devine staţionar, adică $y[k] = y[9] = ct, \forall k \ge 10$. În concluzie, răspunsul este:

$$y[k] = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} h[k-i] & \text{pentru} \quad 0 \le k \le 9 \\ \sum_{i=0}^{9} h[k-i] & \text{pentru} \quad k \ge 10 \end{cases}$$

Răspunsul sistemului se poate obţine şi prin convoluţie:

$$y[k] = h[k] \otimes x[k] = \sum_{i=0}^{k} x[i] \cdot h[k-i] \underset{x[k]=0 \text{ pt. } k \ge 10}{\overset{x[k]=u[k]=1 \text{ pt. } 0 \le k \le 9}{=}} \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} h[k-i] \text{ pentru } 0 \le k \le 9 \\ \sum_{i=0}^{9} h[k-i] \text{ pentru } k \ge 10 \end{cases}$$

3.3.4. Un SNI este caracterizat de relaţia intrare – ieşire cu diferenţe finite:

$$y[k] - y[k-1] + 0{,}21 \cdot y[k-2] = x[k], \forall k.$$

Să se determine:

a) funcţia de transfer (funcţia pondere) h[k];
b) răspunsul indicial;
c) să se analizeze stabilitatea sistemului.

Rezolvare

a) $x[k] = \delta[k] \Rightarrow h[k] - h[k-1] + 0{,}21 \cdot h[k-2] = \delta[k], \forall k$

$$k = 0 \Rightarrow h[0] - 0 + 0{,}21 \cdot 0 = \delta[0] = 1 \Rightarrow h[0] = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow h[1] - h[0] + 0{,}21 \cdot 0 = \delta[1] = 0 \Rightarrow h[1] = h[0] = 1$$

$$k = 2 \Rightarrow h[2] - h[1] + 0{,}21 \cdot h[0] = \delta[2] = 0 \Rightarrow h[2] = h[1] - 0{,}21 \cdot h[0] = 0{,}79$$

$$k = 3 \Rightarrow h[3] - h[2] + 0{,}21 \cdot h[1] = \delta[3] = 0 \Rightarrow h[3] = h[2] - 0{,}21 \cdot h[1] = 0{,}58$$

....

Această abordare are avantajul simplităţii, dar nu oferă soluţia explicită. Pentru aceasta, se poate utiliza fie ecuaţia cu operatorul de comutaţie (3.12), fie transformata *Z*.

În cazul (recomandat al) utilizării transformatei Z, se obţine:

$$Y(z)\cdot\left(1-z^{-1}+0{,}21\cdot z^{-2}\right)=X(z)\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}+0{,}21\cdot z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2-z+0{,}21}=\frac{z^2}{(z-0{,}3)\cdot(z-0{,}7)}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z}{(z-0{,}3)\cdot(z-0{,}7)}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{z-0{,}7}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-0{,}3}$$

$$H(z)=\frac{7}{4}\cdot\frac{z}{z-0{,}7}-\frac{3}{4}\cdot\frac{z}{z-0{,}3}$$

$$h[k]=Z^{-1}(H(z))=\frac{7}{4}\cdot e^{k\cdot\ln(0{,}7)}-\frac{3}{4}\cdot e^{k\cdot\ln(0{,}3)}=\frac{7}{4}\cdot 0{,}7^k-\frac{3}{4}\cdot 0{,}3^k$$

Verificare:

$$k=0\Rightarrow h[0]=\frac{7}{4}\cdot 0{,}7^0-\frac{3}{4}\cdot 0{,}3^0=1$$

$$k=1\Rightarrow h[1]=\frac{7}{4}\cdot 0{,}7^1-\frac{3}{4}\cdot 0{,}3^1=1$$

$$k=2\Rightarrow h[2]=\frac{7}{4}\cdot 0{,}7^2-\frac{3}{4}\cdot 0{,}3^2=0{,}79$$

$$k=3\Rightarrow h[3]=\frac{7}{4}\cdot 0{,}7^3-\frac{3}{4}\cdot 0{,}3^3=0{,}58$$

b) Răspunsul indicial se determină prin convoluţia funcţiei pondere cu u[k]:

$$r[k]=h[k]\otimes u[k]=\sum_{i=0}^{k}h[k-i]\cdot u[i]=\sum_{i=0}^{k}h[i]\cdot u[k-i]$$

$$k=0\Rightarrow r[0]=h[0]\cdot u[0]=h[0]=1$$

$$k=1\Rightarrow r[1]=h[1]\cdot u[0]+h[0]\cdot u[1]=h[0]+h[1]=2$$

$$k=2\Rightarrow r[2]=h[2]\cdot u[0]+h[1]\cdot u[1]+h[0]\cdot u[2]=h[0]+h[1]+h[2]=2{,}1$$

$$k=3\Rightarrow r[3]=h[3]+h[2]+h[1]+h[01]=1{,}3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots r[k]=\sum_{i=0}^{k}h[i]=\frac{7}{4}\cdot\sum_{i=0}^{k}0{,}7^i-\frac{3}{4}\cdot\sum_{i=0}^{k}0{,}3^i=\frac{7}{4}\cdot\frac{1-0{,}7^{k+1}}{0{,}3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-0{,}3^{k+1}}{0{,}7}$$

c) Ecuaţia caracteristică a sistemului este:

$$\beta^2-\beta+0{,}21=0\Rightarrow\beta_{1,2}=\frac{1\pm 0{,}4}{2}$$

Cum $\left|\beta_{1,2}\right|<1$, rezultă că polii funcţiei de transfer se află în interiorul cercului unitate, deci sistemul este stabil.

3.3.5. Un SNI este caracterizat de relaţia intrare – ieşire cu diferenţe finite:

$$y[k]-0{,}5\cdot y[k-1]+0{,}125\cdot y[k-2]=x[k]+x[k-1],\forall k.$$

Să se determine:

a) funcţia de transfer (funcţia pondere) h[k];
b) răspunsul indicial;
c) să se analizeze stabilitatea sistemului.

Rezolvare

a) Se determină H(z) şi apoi se deduce h[k]:

$$Y(z)\cdot\left(1-0{,}5\cdot z^{-1}+0{,}125\cdot z^{-2}\right)=X(z)\cdot\left(1+z^{-1}\right),$$

de unde: $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1+z^{-1}}{1-0{,}5\cdot z^{-1}+0{,}125\cdot z^{-2}}=\dfrac{8z\cdot(z-1)}{8z^2-4z+1}\Rightarrow h[k]=Z^{-1}(H(z))$

Pentru calculul transformatei *Z* inverse, se poate folosi orice metodă de inversiune. Ţinând însă cont de următoarele:

$$Z\left(a^{t}\cdot x[k]\right)=X\left(\frac{z}{a^{T}}\right)\ \text{(teorema semănării)}$$

$$Z(\cos(\omega\cdot t))=\frac{z\cdot(z-\cos(\omega\cdot T))}{z^{2}-2\cdot z\cdot\cos(\omega\cdot T)+1}$$

$$Z(\sin(\omega\cdot t))=\frac{z\cdot\sin(\omega\cdot T)}{z^{2}-2\cdot z\cdot\cos(\omega\cdot T)+1}$$

şi considerând că unitatea de timp este perioada de eşantionare, $(T=1)$, H(z) se poate aduce la o formă în care să se recunoască transformatele *Z* ale unor funcţii trigonometrice:

$$H(z)=\frac{2\sqrt{2}\cdot z\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z-2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)^{2}-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot z\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cdot z\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)^{2}-2\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+1}-\frac{3\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)^{2}-2\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cdot z\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)^{2}-2\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+1}-\frac{3\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)^{2}-2\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot z\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+1}$$

În aceste condiţii, inversiunea este evidentă, astfel că se obţine:

$$h[k]=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{k}\cos\frac{k\pi}{4}-3\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{k}\sin\frac{k\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k}\left(\cos\frac{k\pi}{4}-3\cdot\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

b) $r[k]=\sum_{i=0}^{k}h[i]=\ldots$

c) Ecuaţia caracteristică este:

$8\beta^{2}-4\beta+1=0$, cu soluţiile (polii funcţiei de transfer):

$$p_{1,2}=\frac{2\pm 2\cdot j}{8}=\frac{1\pm j}{4}$$

Cum $\left|p_{1,2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}<1$, rezultă că polii funcţiei de transfer se află în interiorul cercului unitate, deci sistemul este stabil.

4. ANALIZA ÎN FRECVENȚĂ A SISTEMELOR ÎN TIMP DISCRET

La fel ca şi la sistemele analogice, unde analiza comportării în frecvență se realiza prin substituția $s \to j\omega$ în funcția de transfer, în cazul SNI se face substituția:

$$z \to e^{j\omega T}; 0 \le \omega T \le 2\pi \tag{4.1}$$

unde T este perioada de eşantionare. Această substituție este firească, dacă se ține cont de faptul că, la transformata Z, variabila $z = e^{sT}$.
Dacă se notează:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}; F = \frac{1}{T} \tag{4.2}$$

(pulsația, respectiv pulsația de eşantionare), rezultă că Ω corespunde perioadei (considerată în frecvență) de repetiție a funcției $H\left(e^{j\omega T}\right)$ pe axa pulsațiilor fizice. Funcția $H\left(e^{j\omega T}\right)$ se numeşte **funcție izocronă**.

4.1. FUNCȚIA IZOCRONĂ

În paragrafele anterioare s-au prezentat metode de analiză a comportării SAI în (domeniul) timp. Punctul comun al metodelor prezentate este determinarea funcției de transfer, H(s) respectiv H(z), diferența între ele fiind dată de modul în care se lucrează cu aceasta pentru determinarea răspunsului y(t).

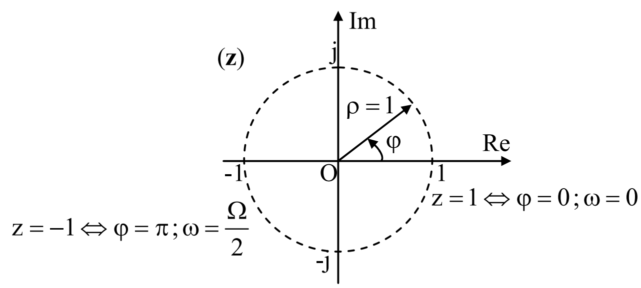


Fig. 4.1
Funcția izocronă

Cum $H\left(e^{j\omega T}\right)$ este periodică ca funcție de ω (corespunzătoare frecvențelor fizice), rezultă că pentru a determina complet comportarea SNI în domeniul frecvențelor fizice este suficientă studierea funcției izocrone pentru $0 \le \omega T \le 2\pi$, adică pe cercul $|z| = 1$, după cum se poate observa în figura 4.1. În consecință, pentru studiul comportării SNI în frecvență, conturul cercului $|z| = 1$ are aceeaşi importanță ca şi semiaxa pozitivă a frecvențelor $\left(\omega \in \mathbf{R}_+\right)$ la studiul SAI.
Cu notația

$$\varphi = \omega T = 2\pi \cdot \frac{\omega}{\Omega} \tag{4.3}$$

care se va numi pulsația redusă sau normată, rezultă că punctul $z = -1$ (figura 4.1) este caracterizat de $\varphi = \pi \Leftrightarrow \omega = \frac{\Omega}{2}$, adică $z = -1$ corespunde frecvenței Nyquist de eşantionare a funcției izocrone în frecvență:

$$f_N = \frac{F}{2} = \frac{\Omega}{4\pi} \tag{4.4}$$

<u>Observație</u>:
Dacă eşantionarea se consideră în domeniul frecvență, atunci condiția (Nyquist) conform căreia perioada de eşantionare trebuie să fie jumătate din perioada semnalului devine (4.4).
La fel ca orice număr complex, $H\left(e^{j\varphi}\right)$ se poate scrie sub forma:

$$H\left(e^{j\varphi}\right) = A(\varphi) \cdot e^{j\beta(\varphi)} \tag{4.5}$$

unde:

$$A(\varphi) = \left|H\left(e^{j\varphi}\right)\right| \tag{4.6}$$

şi se numeşte caracteristica de amplitudine (amplificarea sau câştigul SNI), putând fi exprimată şi sub formă logaritmică:

$$A(\varphi)\big|_{dB} := \alpha(\varphi) = 20 \cdot \lg A(\varphi) \tag{4.7}$$

iar

$$\beta(\varphi) = \arg\left(H\left(e^{j\varphi}\right)\right) \tag{4.8}$$

se numeşte caracteristica de fază.

Evaluarea funcțiilor $\alpha(\varphi)$ şi $\beta(\varphi)$ pentru $0 \le \varphi \le 2\pi$ se poate face printr-o construcție grafică, în funcție de zerourile z_i şi polii p_i ai funcției de sistem, scrisă sub forma:

$$H(z) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)} \tag{4.9}$$

cu $M \le N$, sistemul presupunându-se cauzal.

În figura 4.2 s-a considerat că punctul Q este afixul în planul (z) al numărului $z = e^{j\varphi} \in (|z| = 1)$ – punctul pe cerc corespunzător pulsației reduse, φ, pentru care se studiază comportamentul frecvențial. Considerând că zeroului (polului) z_i (p_i) îi corespunde în planul complex punctul Z_i (P_i), în conformitate cu figura 4.2 şi ținând cont de (4.5) şi (4.7), rezultă că:

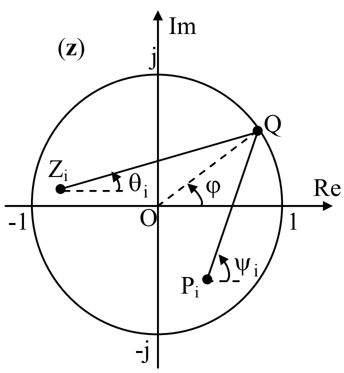


Fig. 4.2
Polii/zerourile funcției izocrone

$$\alpha(\varphi) = 20 \cdot \left(\lg K + \sum_{i=1}^{M} \lg \overline{QZ}_i - \sum_{i=1}^{M} \lg \overline{QP}_i\right) \tag{4.10}$$

este expresia caracteristicii de amplitudine, unde:

$$\begin{cases} \overline{QZ}_i = \left|e^{j\varphi} - z_i\right| \\ \overline{QP}_i = \left|e^{j\varphi} - p_i\right| \end{cases} \tag{4.11}$$

iar relația

$$\beta(\varphi) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i - \sum_{i=1}^{M} \psi_i \tag{4.12}$$

este expresia caracteristicii de fază, unde:

$$\begin{cases} \theta_i = \arg\left(e^{j\varphi} - z_i\right) \\ \psi_i = \arg\left(e^{j\varphi} - p_i\right) \end{cases} \tag{4.13}$$

4.2. TIPRI DE FUNCȚII REPREZENTATIVE PENTRU SNI

4.2.1 Funcția de întârziere

Deoarece $Z(f[k-1]) = z^{-1} \cdot F(z)$, sau, altfel spus, z^{-1} este operatorul de întârziere cu o perioadă de eşantionare, expresia funcției de întârziere este:

$$H(z) = z^{-1} \tag{4.14}$$

Rezultă că:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T} \tag{4.15}$$

Cu notația (4.3), se obține:

$$A(\varphi) = \left|H\left(e^{j\varphi}\right)\right| = 1 \Rightarrow \alpha(\varphi) = 20 \cdot \lg A(\varphi) = 0 \tag{4.16}$$

$$\beta(\varphi) = \arg\left(H\left(e^{j\varphi}\right)\right) = \arg\left(e^{-j\varphi}\right) = -\varphi \tag{4.17}$$

În concluzie, funcția de întârziere este caracterizată de întârziere nulă şi defazaj liniar.

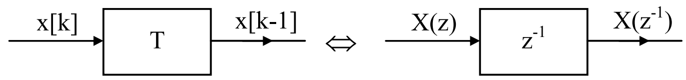


Fig. 4.3
Reprezentarea schematică a funcției de întârziere

În figura 4.3 se propune o reprezentare schematică a funcției (blocului) de întârziere.

4.2.2 Funcția de amplificare

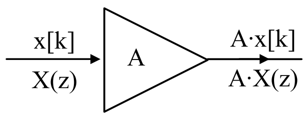


Fig. 4.4
Reprezentarea schematică a funcției de amplificare

Are expresia:

$$H(z) = A > 0 = ct. \tag{4.18}$$

şi se reprezintă schematic ca în figura 4.4.
Este evident că se obține:

$$\left|H\left(e^{j\varphi}\right)\right| = A \Rightarrow \alpha(\varphi) = 20 \cdot \lg A \tag{4.19}$$

$$\beta(\varphi) = \arg\left(H\left(e^{j\varphi}\right)\right) = \arg(A) = 0 \tag{4.20}$$

În concluzie, funcția (blocul) de amplificare este caracterizată de amplificare constantă şi defazaj nul.
Orice funcție de transfer cu număr finit de termeni se poate exprima sub forma:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot z^{-i}} \tag{4.21}$$

Transpusă în domeniul timp (ținând cont de faptul că $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$), (4.21) devine:

$$y[k] + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot y[k-i] = \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot x[k-i] \tag{4.22}$$

Rezultă că orice SNI se poate reprezenta cu ajutorul blocurilor (elementare) de întârziere şi de amplificare.

4.2.3 Funcția de diferențiere numerică

Un SNI care realizează această funcție este caracterizat de o relație intrare – ieşire de tipul:

$$y[k] = \Delta(x[k]) = x[k] - x[k-1] \tag{4.23}$$

În planul (z), (4.23) devine:

$$Y(z) = X(z) \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \tag{4.24}$$

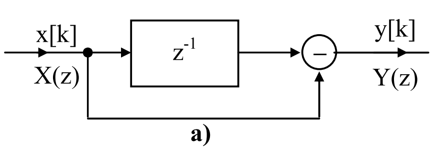
Rezultă că un SNI care realizează diferențierea numerică are structura din figura 4.5a.
Din (4.24) rezultă funcția de transfer:

$$H(z) = 1 - z^{-1} \Rightarrow H\left(e^{j\varphi}\right) = 1 - e^{-j\varphi} = 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot e^{j\frac{\varphi - \pi}{2}} \tag{4.25}$$

Se obține:

$$A(\varphi) = 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \tag{4.26}$$

$$\beta(\varphi) = \frac{\pi - \varphi}{2} \tag{4.27}$$



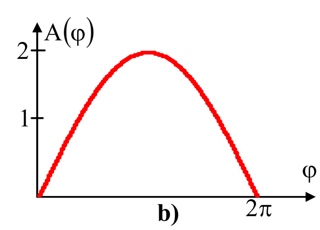


Fig. 4.5
a) Reprezentarea funcției de diferențiere numerică
b) Caracteristica de amplitudine

După cum s-a văzut la analiza SNI în timp – relația (3.16) – operatorul de diferențiere se poate generaliza sub forma diferenței finite de ordinul p:

$$y[k] = \Delta^p x[k] = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \cdot (-1)^i x[p-i] \tag{4.28}$$

relație care în planul (z) devine:

$$Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^p \cdot X(z) \tag{4.29}$$

Funcția de transfer a diferențiatorului de ordinul p este:

$$H(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^p \tag{4.30}$$

care în domeniul frecvență devine funcția izocronă:

$$H\left(e^{j\varphi}\right) = \left(1 - e^{-j\varphi}\right)^p = 2^p \cdot \sin\frac{p \cdot \varphi}{2} \cdot e^{j\frac{\pi - p\cdot\varphi}{2}} \tag{4.31}$$

Rezultă:

$$A(\varphi) = 2^p \cdot \sin\frac{p \cdot \varphi}{2} \tag{4.32}$$

$$\beta(\varphi) = \frac{p \cdot \varphi - \pi}{2} \tag{4.33}$$

Caracteristica de amplitudine este reprezentată grafic în figura 4.5b.
Evident, reprezentarea funcției de diferențiere numerică de ordinul p conține p “etaje” de ordinul 1, conectate în cascadă, ca în figura 4.6.

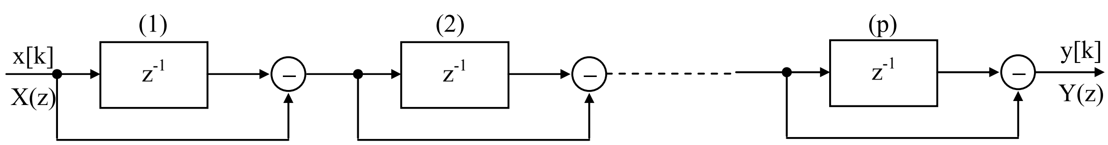


Fig. 4.6
Reprezentarea funcției de diferențiere numerică de ordinul p

4.2.4 Funcția “fereastră dreptunghiulară”

Funcția pondere de tip “fereastră dreptunghiulară” se obține prin eşantionarea treptei unitare u(t) pe o anumită durată, în figura 4.7a aceasta fiind egală cu p perioade de eşantionare T; axa timpului este gradată în perioade de eşantionare.

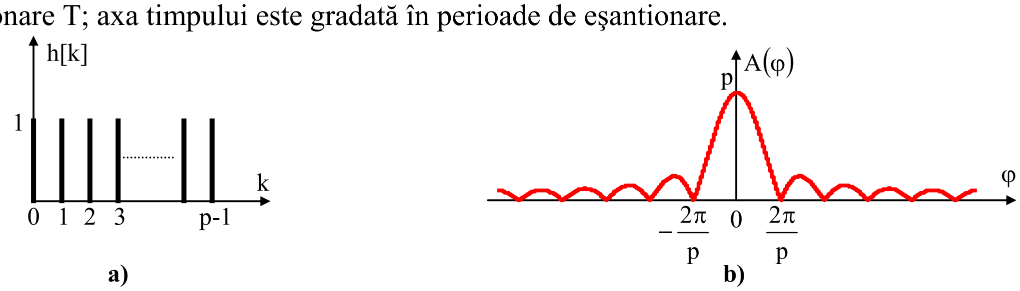


Fig. 4.7
a) Funcția “fereastra dreptunghiulară”, cu T = 1
b) Caracteristica de amplitudine

Evident, funcția de transfer corespunzătoare este:

$$h[k] = u[k] - u[k-p] = \sum_{i=0}^{p-1} \delta[k-i] \tag{4.34}$$

căreia în planul (z) îi corespunde expresia:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{p-1} z^{-i} = \frac{1 - z^{-p}}{1 - z^{-1}} \tag{4.35}$$

astfel încât în domeniul frecvență se obține funcția izocronă:

$$H\left(e^{j\varphi}\right)=\frac{1-e^{-j\cdot p\cdot\varphi}}{1-e^{-j\varphi}}=\left|\frac{\sin\frac{p\cdot\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|\cdot e^{j\frac{\varphi\cdot(p-1)}{2}} \tag{4.36}$$

Rezultă:

$$A(\varphi)=\left|\frac{\sin\frac{p\cdot\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \tag{4.37}$$

$$\beta(\varphi)=\frac{\varphi\cdot(p-1)}{2} \tag{4.38}$$

Caracteristica de amplitudine este reprezentată grafic în figura 4.7b.

Funcția pondere "fereastră dreptunghiulară" se utilizează pentru scindarea unei secvențe numerice x[k] la valoarea $p-1$. Rezultă în acest mod răspunsul $y[k]=x[k]\cdot h[k]$, pentru care $Y\left(e^{j\varphi}\right)$ diferă substanțial de $X\left(e^{j\varphi}\right)$, fapt datorat alurii funcției $A(\varphi)$, care nu este constantă în intervalul de bază $0<\varphi<\frac{2\pi}{m}$. Din acest motiv, o problemă importantă la sinteza SNI este obținerea unei ferestre care să deformeze cât mai puțin spectrul secvenței x[k] pe care o scindează.

4.2.5 Funcții selective

La fel ca şi SAI, SNI pot deveni selective, realizând filtrarea semnalelor numerice datorită polilor funcției de transfer. Astfel, se pot defini câteva funcții selective tipice:

4.2.5.1 Funcția de ordinul 1

Este caracterizată de prezența unui singur pol în funcția de transfer, care este de forma:

$$H(z)=\frac{K}{z-p} \tag{4.39}$$

unde $p\in\mathbf{R}$ şi $|p|<1$, pentru ca sistemul să fie stabil.

Pentru simplificare, se poate considera $K=1$. În aceste condiții, funcția izocronă devine:

$$H\left(e^{j\varphi}\right)=\frac{1}{e^{j\varphi}-p} \tag{4.40}$$

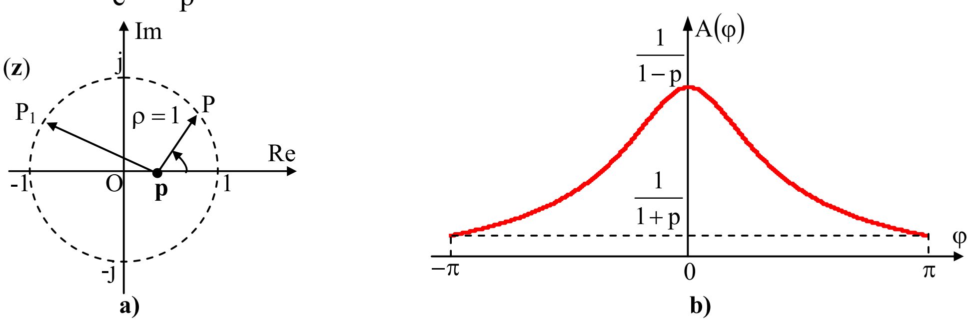


Fig. 4.8

a) Funcția de ordinul 1
b) Caracteristica de amplitudine

Ținând cont de dezvoltarea în serie a funcției exponențiale:

$$e^{x}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{i}}{i!}\underset{x\to 0}{\approx}1+x \tag{4.41}$$

se obține:

$$H\left(e^{j\varphi}\right)=\frac{1}{1-p+j\varphi} \tag{4.42}$$

Caracteristica de amplitudine are expresia:

$$A(\varphi)=\left|H\left(e^{j\varphi}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{(1-p)^2+\varphi^2}} \tag{4.43}$$

Această funcție aproximează caracteristica unui FTJ în intervalul de bază $-\pi \le \varphi \le \pi$ dacă punctul P_1 (corespunzător polului p în figura 4.8a)

Analizând forma caracteristicii de selectivitate din figura 4.8b, se poate constata similitudinea între caracteristica funcției de ordinul 1 a SNI şi cea a unui FTJ analogic. Mai mult, ținând cont că în figura 4.8b s-a reprezentat caracteristica de selectivitate în intervalul de bază $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ şi de periodicitatea acestora, se poate afirma că SNI selective pot fi considerate ca eşantionări ale corespondentelor lor analogice. Caracteristicile SNI reprezintă repetarea periodică a caracteristicilor SAI din care provin (ca şi spectrul semnalului eşantionat, care este repetarea periodică a spectrului semnalului analogic).

4.2.5.1 Funcția de ordinul 2

În forma sa cea mai generală, funcția de ordinul 2 are expresia:

$$H(z)=K\cdot\frac{b_0+b_1\cdot z^{-1}+b_2\cdot z^{-2}}{1+a_1\cdot z^{-1}+a_2\cdot z^{-2}}:=K\cdot\frac{B(z)}{A(z)};\ K=\text{ct.} \tag{4.44}$$

cu $B(z), A(z)\in \mathbf{R}[X]$.

Un SNI cu funcția de transfer (4.44) este stabil dacă polii acesteia sunt situați în interiorul cercului $|z|=1$, ceea ce impune anumite restricții asupra coeficienților a_1 şi a_2. Astfel:

- Dacă $a_2 > \frac{a_1^2}{4}a$, atunci H(z) are 2 poli complecşi (conjugați) şi condiția de stabilitate este $a_2 < 1$
- Dacă $a_2 < \frac{a_1^2}{4}a$, atunci H(z) are 2 poli reali şi condițiile de stabilitate sunt:

$$\begin{cases} A(1)>0 \Leftrightarrow 1+a_1+a_2 \ge 0 \\ A(-1)>0 \Leftrightarrow 1-a_1+a_2>0 \end{cases}$$

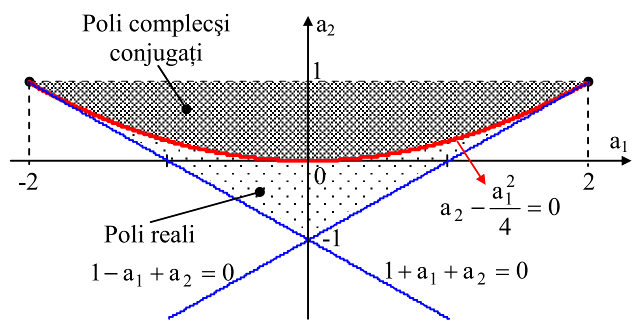


Fig. 4.9
Stabilitatea SNI de ordinul 2

Aceste condiții sunt ilustrate în figura 4.9.

SNI selectiv de ordinul este cel cu polii complecşi – punctele Q_1 şi Q_2 în figura 4.10a.

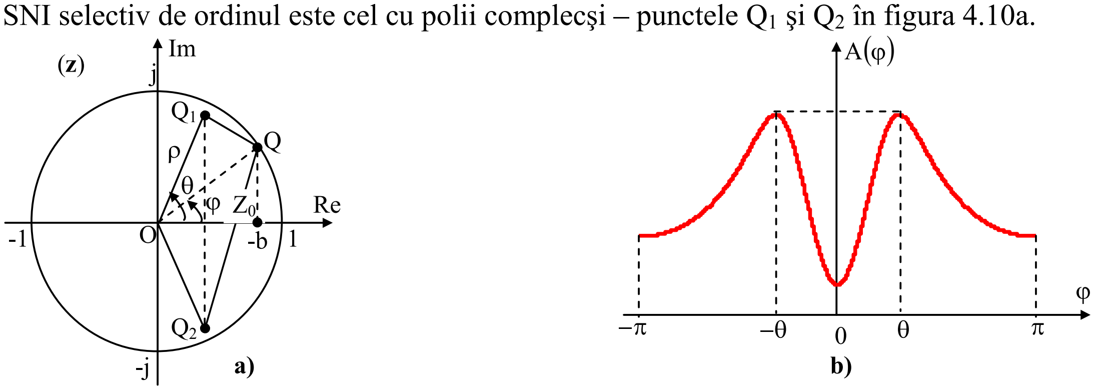


Fig. 4.10

a) Polii/zerourile funcției izocrone
b) Caracteristica de amplitudine

Dacă funcția de transfer are un zero real $z_0 = -b$, atunci expresia ei devine:

$$H(z) = K \cdot \frac{1 + b \cdot z^{-1}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \tag{4.45}$$

căreia îi corespunde funcția izocronă:

$$H\left(e^{-j\varphi}\right) = K \cdot \frac{1 + b \cdot e^{-j\varphi}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\varphi} + a_2 \cdot e^{-2j\varphi}} \tag{4.46}$$

Dacă se notează cei doi poli ai funcției de transfer ca în figura 4.10a:

$$p_{1,2} = \rho \cdot e^{\pm j\theta} \tag{4.47}$$

atunci se obține:

$$H\left(e^{-j\varphi}\right) = K \cdot \frac{1 + b \cdot e^{-j\varphi}}{\left(1 - \rho \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\varphi}\right) \cdot \left(1 - \rho \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\varphi}\right)} \tag{4.48}$$

Luând, pentru simplificare $K = 1$, se obține expresia caracteristicii de amplitudine:

$$A(\varphi) = \left|H\left(e^{-j\varphi}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot b \cdot \cos\varphi + b^2}{\left(1 - 2 \cdot \rho \cdot \cos(\varphi + \theta) + \rho^2\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \theta) + \rho^2\right)}} \tag{4.49}$$

care este reprezentată grafic în figura 4.10b.
Derivând expresia (4.49) se poate constata că valoarea sa maximă se obține pentru $\varphi = \theta$, iar cea minimă pentru $b = \cos\theta$.

4.3. REPREZENTĂRI ALE SNI

După cum s-a văzut, orice SNI (indiferent dacă este definit prin funcția de transfer sau prin relația intrare - ieşire) poate fi sintetizat cu ajutorul celor 3 blocuri fundamentale: amplificatoare, întârziere unitară şi sumatoare.
Astfel, un SNI recursiv (sau IIR) este descris de o ecuație de tipul:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i \cdot x[n-i] - \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot y[n-i] \tag{4.50}$$

Acestui sistem îi corespunde o structură a cărei reprezentare schematică poate fi urmărită în figura 4.11.

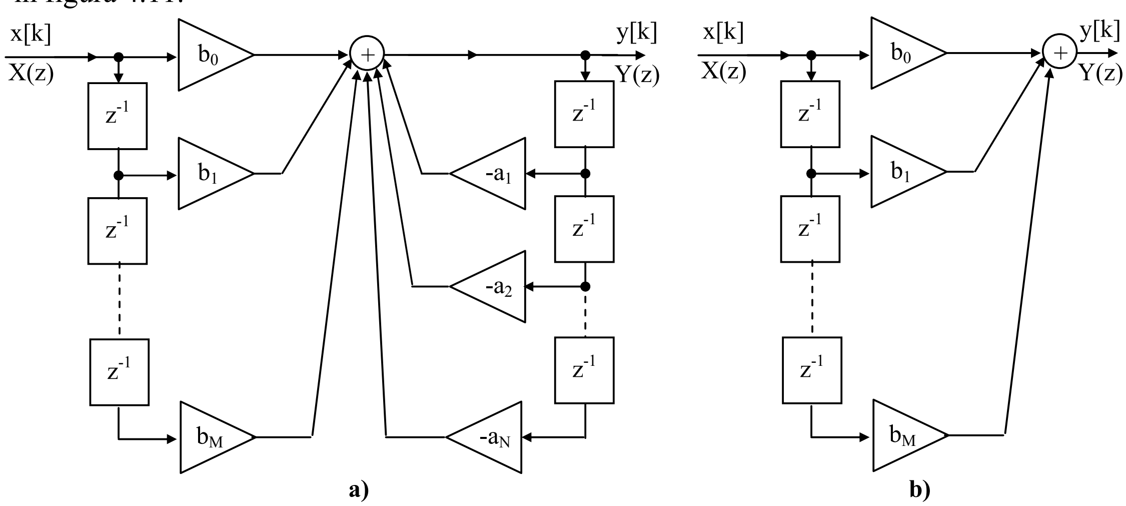


Fig. 4.11

a) Reprezentarea directă a funcției recursive
b) Reprezentarea funcției nerecursive

Dacă $a_i = 0, \forall i = \overline{1, N}$, atunci sistemul devine nerecursiv şi posedă reprezentarea schematică din figura 4.11b.

Schema SNI recursiv însă este neeconomică, întrucât se folosesc $M+N+1$ amplificatoare şi $M+N$ celule de întârziere unitară. O soluție mai judicioasă ar putea fi utilizarea unor celule de întârziere comune pe calea directă şi pe calea de reacție. Pentru a deduce această schemă, se va considera inițial un SNI fără eşantioane întârziate ale intrării şi cu $b_0 = 1$:

$$y[n] = x[n] - \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot y[n-i] \tag{4.51}$$

Se obține imediat:

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot z^{-i}} \tag{4.52}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot z^{-i}} \tag{4.53}$$

Schema acestui sistem este prezentată în figura 4.12a.

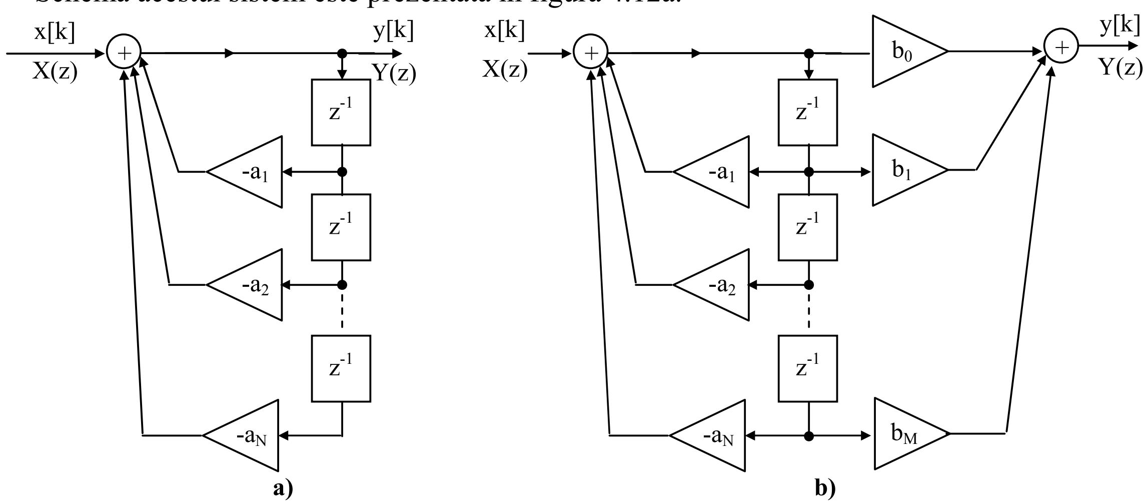


Fig. 4.12

a) Reprezentarea funcției recursive fără eşantioane întârziate la intrare
b) Schema canonică a unui SNI recursiv

În acest mod, funcția de transfer a sistemului dat de (4.50) se scrie imediat:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot z^{-i}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot z^{-i}} \sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i} \cdot H_1(z) \tag{4.54}$$

Această schemă (numită şi canonică) se obține imediat din cea corespunzătoare funcției $H_1(z)$ şi este prezentată în figura 4.12b.

Trebuie precizat totuşi că aceste scheme prezintă o precizie limitată, din acest motiv se preferă cascadarea unor sisteme cu funcții de transfer de ordinul 1 şi/sau 2.

4.4. APLICAȚII

4.4.1.

$$y[k]-\frac{1}{2}\cdot y[k-1]=x[k]$$

Determinați FDT şi desenați schema SNI.

Rezolvare

$$Y(z)-\frac{1}{2}\cdot Y(z)\cdot z^{-1}=X(z)$$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

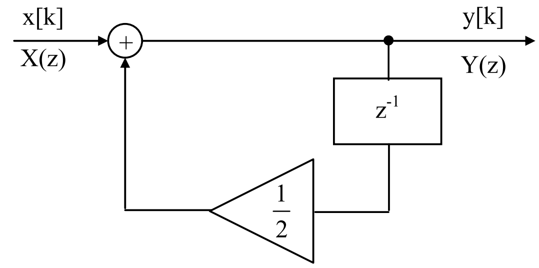


Fig. 4.13
Reprezentarea funcției de diferențiere numerică

4.4.2.

$$y[k]=x[k]+\frac{1}{4}\cdot x[k-1]$$

Aceleaşi cerințe

Rezolvare

$$Y(z)=X(z)+\frac{1}{4}\cdot X(z)\cdot z^{-1}$$

$$H(z)=1+\frac{1}{4}z^{-1}$$

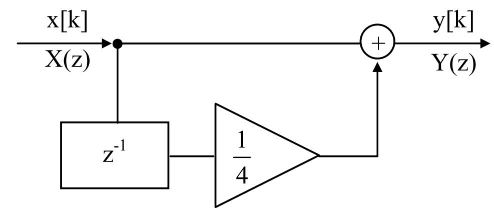


Fig. 4.14
Reprezentarea schematică a funcției de amplificare

4.4.3.

$$y[k]-\alpha\cdot y[k-1]=x[k]$$

a. Dacă $x[k]=\beta\cdot\delta[k]$, determinați răspunsul y[k].

b. Determinați funcția pondere h[k].

Rezolvare

a. $y[k]=\alpha\cdot y[k-1]+x[k]$

$k=0\Rightarrow y[0]=\alpha\cdot y[-1]+x[0]\Rightarrow y[0]=\beta\cdot\delta[0]=\beta$

$k=1\Rightarrow y[1]=\alpha\cdot y[0]+x[1]\Rightarrow y[1]=\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\delta[1]=\alpha\cdot\beta$

$k=2\Rightarrow y[2]=\alpha\cdot y[1]+x[2]\Rightarrow y[2]=\alpha^2\cdot\beta+\beta\cdot\delta[2]=\alpha^2\cdot\beta$

....

$y[k]=\alpha^k\cdot\beta\cdot u[k]$

b. $x[k]=\delta[k]\Rightarrow\beta=1\Rightarrow h[k]=\alpha_k\cdot u[k]$

4.4.5. Se consideră un sistem numeric liniar şi cauzal, care la excitațiile $x_1[k]$ şi $x_2[k]$ furnizează răspunsurile $y_1[k]$ şi $y_2[k]$ (figura 4.15a, b).

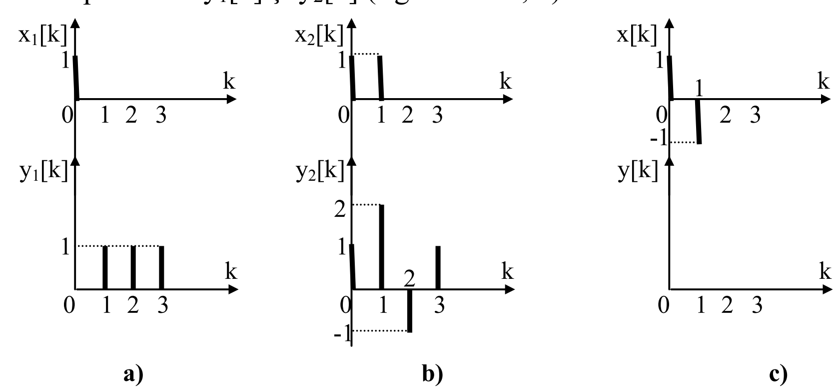


Fig. 4.15
Funcția "fereastra dreptunghiulară", cu T = 1

a. Precizați dacă sistemul este invariant în timp.
b. Stabiliți răspunsul sistemului la excitația x[k] din figura 4.15c
c. Presupunând că sistemul este invariant în timp, stabiliți răspunsurile $y_2[k]$ și y[k].

Rezolvare

a. Un sistem invariant în timp este caracterizat de o relație de tipul:

$$x[k] = \alpha_1 \cdot x_1[k] + ... + \alpha_p \cdot x_1[k-p] \Rightarrow y[k] = \alpha_1 \cdot y_1[k] + ... + \alpha_p \cdot y_1[k-p], \ \forall k$$

Din figura 4.a și b rezultă că $x_2[k] = x_1[k] + x_1[k-1]$. Se verifică dacă această relație se conservă și la ieșire: $y_2[k] = y_1[k] + y_1[k-1]$?

$k = 0 \Rightarrow y_2[0] = y_1[0] + y_1[-1] \Leftrightarrow y_2[0] = 0$, dar conform figurii 4.b, $y_2[0] = 1$. În concluzie, sistemul nu este invariant în timp.

b. Sistemul fiind liniar, rezultă că există o relație de tipul:

$$x[k] = \alpha_1 \cdot x_1[k] + \alpha_2 \cdot x_2[k] \Rightarrow y[k] = \alpha_1 \cdot y_1[k] + \alpha_2 \cdot y_2[k], \ \forall k$$

Rezultă că excitația x[k] trebuie pusă în legătură cu $x_1[k]$ și $x_2[k]$:

$$x[k] = a \cdot x_1[k] + b \cdot x_2[k] \forall k \Rightarrow \begin{cases} k = 0 : x[0] = a \cdot x_1[0] + b \cdot x_2[0] \\ k = 1 : x[1] = a \cdot x_1[1] + b \cdot x_2[1] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ -1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$x[k] = 2 \cdot x_1[k] - x_2[k] \Rightarrow y[k] = 2 \cdot y_1[k] - y_2[k], \ \forall k$$

Răspunsul y[k] este prezentat în figura 4.15.

c. La punctul b. s-a arătat că $x_2[k] = x_1[k] + x_1[k-1]$.

Sistemul fiind invariant în timp în acest caz, rezultă răspunsul:

$$y_2[k] = y_1[k] + y_1[k-1], \forall k$$
$$k = 0 \Rightarrow y_2[0] = y_1[0] + y_1[-1] = 0$$
$$k = 1 \Rightarrow y_2[1] = y_1[1] + y_1[0] = 1$$
$$k = 2 \Rightarrow y_2[2] = y_1[2] + y_1[1] = 2$$
$$k = 3 \Rightarrow y_2[3] = y_1[3] + y_1[2] = 2$$
$$k = 4 \Rightarrow y_2[4] = y_1[4] + y_1[3] = 1$$
$$k = 5 \Rightarrow y_2[5] = y_1[5] + y_1[4] = 0$$

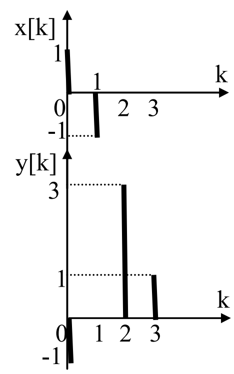


Fig. 4.16

4.4.6. Un SNI este caracterizat de funcția de transfer $H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$. Se precizează următoarele eșantioane ale funcției pondere: $h[0] = 3$; $h[1] = 1{,}5$; $h[2] = 1{,}13$; $h[3] = 0{,}85$; $h[4] = 0{,}85$ și că sistemul este cauzal. Se cere:

a. Coeficienții funcției de transfer.
b. Sintetizarea răspunsului folosind un număr minim de linii de întârziere.
c. Funcția pondere.

Rezolvare

a. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow \left(1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}\right) \cdot Y(z) = \left(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}\right) \cdot X(z)$

Aplicând transformata *Z* inversă se obține3 ecuația cu diferențe a sistemului:

$$y[k] + a_1 \cdot y[k-1] + a_2 \cdot y[k-2] = b_0 \cdot x[k] + b_1 \cdot x[k-1] + b_2 \cdot x[k-2], \forall k$$

Ținând cont de faptul că dacă $x[k] = \delta[k]$, atunci $y[k] = h[k]$ (funcția pondere este răspunsul sistemului la impulsul unitate) și de cauzalitatea sistemului, se obține succesiv:

$$k = 0 \Rightarrow h[0] = b_0 \cdot \delta[0] = b_0 \Leftrightarrow b_0 = 3$$
$$k = 1 \Rightarrow h[1] + a_1 \cdot h[0] = b_1 \cdot \delta[0] = b_1 \Leftrightarrow 1{,}5 + 3 \cdot a_1 = b_1$$

$$k = 2 \Rightarrow h[2] + a_1 \cdot h[1] + a_2 \cdot h[0] = b_2 \cdot \delta[0] = b_2 \Leftrightarrow 1{,}13 + 1{,}5 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 = b_2$$
$$k = 3 \Rightarrow h[3] + a_1 \cdot h[2] + a_2 \cdot h[1] = 0 \Leftrightarrow 0{,}85 + 1{,}13 \cdot a_1 + 1{,}5 \cdot a_2 = 0$$
$$k = 4 \Rightarrow h[4] + a_1 \cdot h[3] + a_2 \cdot h[2] = 0 \Leftrightarrow 0{,}65 + 0{,}85 \cdot a_1 + 1{,}13 \cdot a_2 = 0$$

Se obține astfel următorul sistem de ecuații, cu necunoscutele a_0, a_1, b_0, b_1, b_2:

$$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_1 - 3 \cdot a_1 = 1{,}5 \\ b_2 - 3 \cdot a_2 - 1{,}5 \cdot a_1 = 1{,}13 \\ 1{,}13 \cdot a_1 + 1{,}5 \cdot a_2 = -0{,}85 \\ 0{,}85 \cdot a_1 + 1{,}13 \cdot a_2 = -0{,}65 \end{cases}$$

b. Schema sistemului este prezentată în figura 4..

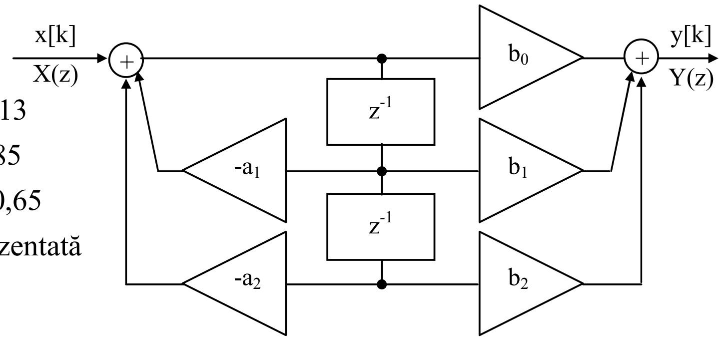


Fig. 4.4
Reprezentarea schematică a funcției de amplificare

c. Fie p_1 şi p_2 polii numitorului, presupuşi reali. Rezultă că:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - p_1} + \frac{C}{z - p_2} \Rightarrow H(z) = A + \frac{B}{1 - p_1 \cdot z^{-1}} + \frac{C}{1 - p_2 \cdot z^{-1}}$$

Aplicând transformata *Z* inversă se obține h[k]:

$$h[k] = \left(A \cdot \delta[k] + B \cdot p_1^k + C \cdot p_2^k\right) \cdot u[k]$$

SNI cauzal, cu relația intrare – ieşire:

$$y[k] - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y[k-1] + \frac{1}{4} \cdot y[k-2] = x[k] - x[k-1], \forall k$$

a. h[n] şi H(z)
b. Analitic şi grafic: caracteristica amplitudine/frecvență.